

Chapitre 2 : Etudes des procédés ou systèmes linéaires

1- Modèle d'un procédé linéaire dans le domaine temporel

1.1 Système linéaire

1.2 Linéarisation d'un système ou procédé non linéaire

2- Modèle d'un procédé linéaire dans le domaine de Laplace

2.1 Fonction de transfert

2.2 Classification d'une fonction de transfert

2.3 Fonction de transfert globale de l'association des systèmes linéaires

2.4 Fonctions de transfert réglante et perturbatrice

2.5 Fonctions de transfert FTBO et FTBF

Pour déterminer une commande performante en régulation ou en asservissement d'un procédé, il est indispensable de disposer d'un modèle mathématique de ce procédé. Ce modèle est constitué d'un ensemble d'équations reliant, pour chaque unité du procédé, les variables de sortie à celles d'entrée et aux paramètres.

De telles équations sont obtenues en écrivant les équations de conservation de matière, d'énergie et de quantité de mouvement autour de chaque unité du procédé. Les équations ainsi obtenues pour chaque unité forment le modèle de cette unité. Le modèle du procédé est constitué de l'ensemble des équations des modèles de ses unités et des équations de liaisons entre ces dernières.

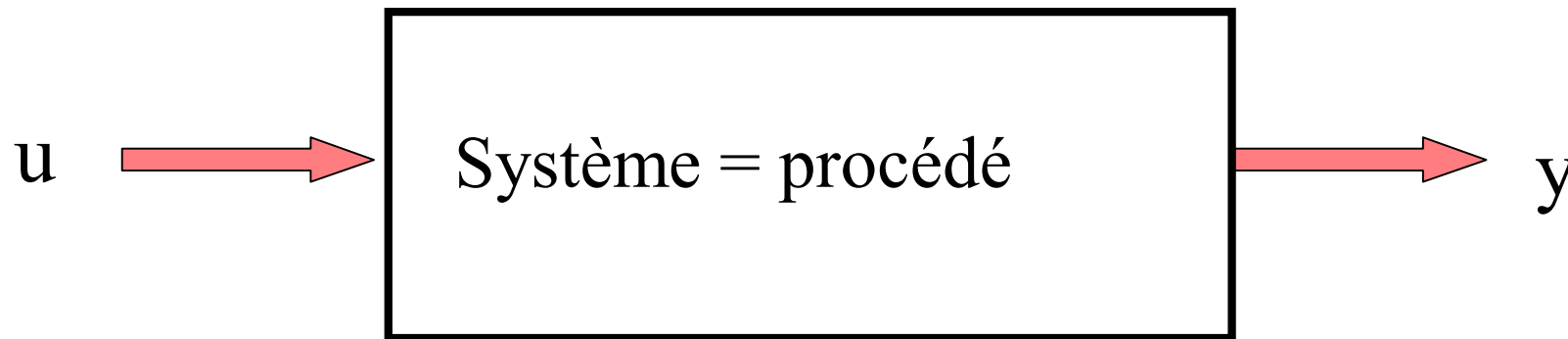
A votre niveau (deuxième année de l'ESTF), on se limitera au modèle simple d'un procédé linéaire ou au modèle linéaire obtenu par linéarisation d'un procédé non linéaire autour de son point de fonctionnement du régime nominale.

1- Modèle d'un procédé linéaire dans le domaine temporel

1.1 Système linéaire

Un système ou procédé Linéaire à Temps Invariant d'ordre n (**SLTI**) est un système pour lequel l'entrée et la sortie sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Systeme monovariabile :



$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} \quad (1)$$

avec $m \leq n$.

il faut n conditions initiales pour que la solution soit unique :

$$y(t_0) , \frac{dy(t_0)}{dt} , \dots , \frac{d^{n-1}y(t_0)}{dt^{n-1}}$$

Lorsque le procédé atteint un régime stationnaire régime nominal caractérisé par le point de fonctionnement (u_0, y_0) , l'équation (1) s'écrit :

$$a_0 y_0 = b_0 u_0$$

On pose $u(t) = u_0 + U(t)$ et $y(t) = y_0 + Y(t)$ où $U(t)$ et $Y(t)$ sont les **déviations** ou les **variations** respectivement de l'entrée et de la sortie autour du point de fonctionnement.

Le modèle d'équations différentielles, autour du point de fonctionnement (u_0, y_0) s'écrit alors :

$$a_0 Y(t) + a_1 \frac{dY(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n Y(t)}{dt^n} = b_0 U(t) + b_1 \frac{dU(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m U(t)}{dt^m} \quad (2)$$

Avec les C.I :

$$Y(t_0) = 0, \quad U(t_0) = 0$$

$$\frac{dY(t_0)}{dt} = \frac{dy(t_0)}{dt}, \quad \frac{d^2 Y(t_0)}{dt^2} = \frac{d^2 y(t_0)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} Y(t_0)}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1} y(t_0)}{dt^{n-1}}$$

C'est ce type de modèle autour du point de fonctionnement (u_o, y_o) que nous utiliserons souvent en régulation.

1.2- Linéarisation d'un système ou procédé non linéaire

Un procédé non linéaire pourra être considéré comme linéaire (ramené à un système type (1)) autour d'un point de fonctionnement (u_o, y_o) si $U(t)$ et $Y(t)$ restent petites. En effet, on linéarise les termes non linéaires dans le modèle du procédé par un développement en série de Taylor et on s'arrête à l'ordre 1. Pour ce faire, nous linéarisons les équations différentielles non linéaires de type :

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(u(t), y(t)) \quad (4)$$

En régime stationnaire (4) devient :

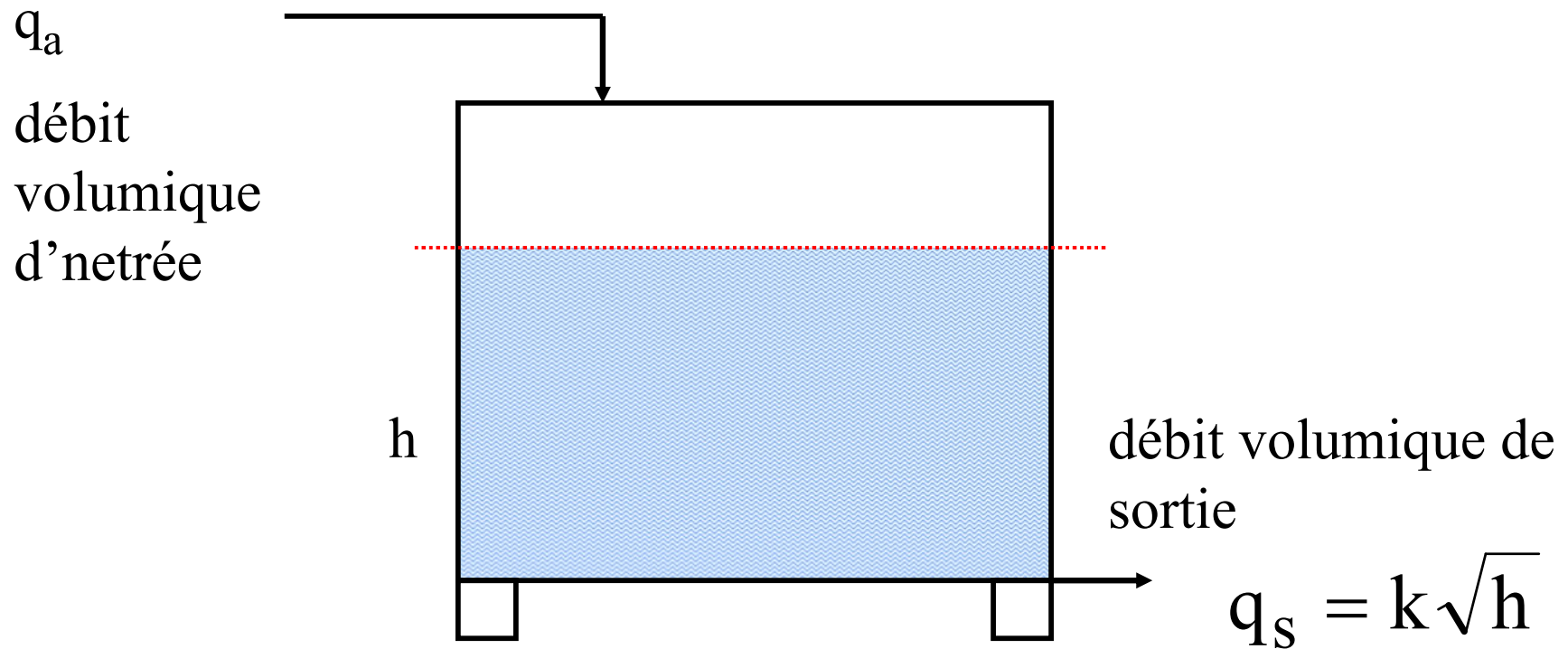
$$0 = g(u(t), y(t)) = g(u_0, y_0) \quad (5)$$

En linéarisant l'équation (4) tout en tenant compte de (5), on obtient :

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial g(u = u_0, y = y_0)}{\partial u} (u - u_0) + \frac{\partial g(u = u_0, y = y_0)}{\partial y} (y - y_0)$$

$$\text{ou encore : } \frac{dY(t)}{dt} = b_0 U(t) + a_0 Y(t)$$

Exemple : considérons l'exemple du bac de stockage à extraction libre : Procédé naturellement stable



Bilan de matière

$$\rho \cdot q_a - \rho \cdot q_s = \frac{d(A \cdot h \cdot \rho)}{dt}$$

$$\text{ou } q_a - q_s = \frac{d(A \cdot h)}{dt} \quad (\text{car } \rho \text{ constante})$$

$$\text{or } q_s = k \sqrt{h} \quad (\text{terme non linéaire en } h)$$

$$\text{donc : } \frac{q_a}{A} - \frac{k \sqrt{h}}{A} = \frac{dh}{dt} = \mathbf{g(q_a, h)} \quad \mathbf{(6)}$$

D'où en linéarisant :

$$g(q_a, h) = \frac{\partial g}{\partial q_a} (q = q_{ao}, h = h_{eo})(q_a - q_{ao}) +$$

$$\frac{\partial g}{\partial h} (q = q_{ao}, h = h_o)(h - h_o) =$$

$$\frac{(q_a - q_{ao})}{A} - \frac{k}{2A\sqrt{h_o}} (h - h_o) = \frac{Q_a}{A} - \frac{k}{2A\sqrt{h_o}} H = \frac{dH}{dt}$$

$$\text{Avec } (q_a - q_{ao}) = Q_a \text{ et } (h - h_o) = H$$

ou encore :

$$H + a_1 \frac{dH}{dt} = b_0 Q_a \quad \text{ou} \quad Y + a_1 \frac{dY}{dt} = b_0 U \quad (\text{système du 1}^{\text{er}} \text{ ordre})$$

$$\text{avec } Y = H; \quad Q_a = U; \quad a_1 = \frac{2A\sqrt{h_e}}{k} = T \text{ (constante de temps);}$$

$$b_0 = \frac{2\sqrt{h_e}}{k}$$

et la fonction de transfert correspondante est alors : $\frac{H(s)}{Q_a(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{1 + a_1 s}$

2- Modèle d'un procédé linéaire dans le domaine de Laplace

2.1 Fonction de transfert

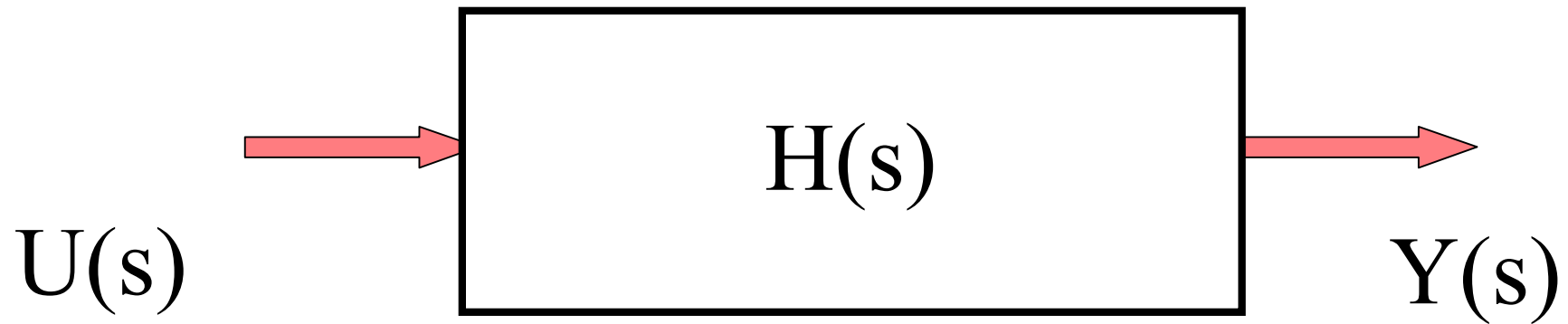
En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1 ou 2) pour $t_0=0$, on obtient :

$$(a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n) Y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) U(s) + P_{n-1}(s)$$

$P_{n-1}(s)$ est un polynôme de degré $n-1$ qui dépend de la structure du procédé et surtout des conditions initiales sur l'entrée et la sortie. Si toutes les conditions initiales sont nulles, alors $P_{n-1}(s) = 0$. Dans ces conditions, on peut définir la Fonction de Transfert (F.T) d'un système, ou sa transmittance, par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad \text{noté} \quad \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{ou} \quad \frac{A(s)}{B(s)}$$

Schéma bloc d'un système ou procédé



2.2 Classification d'une fonction de transfert

Une fonction de transfert peut se mettre sous plusieurs formes. Pour connaître si le système possède ou non plusieurs intégrations, on utilise la forme suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K N(s)}{s^\alpha D(s)} \quad \text{avec } N(0)=1 \text{ et } D(0)=1$$

$$N(s) = 1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m \quad ; \quad D(s) = 1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n$$

α est appelée classe de la fonction de transfert du système

-Si $\alpha = 0$, le système ne comporte pas d'intégration. Le système ou procédé est dit auto-réglant ou naturellement stable ou non évolutif. Le coefficient K est le gain statique du système, on le note parfois G_s et son unité et celle du rapport des unités de Y et U.

-Si $\alpha \neq 0$ alors le système comporte une intégration ($\alpha = 1$) ou deux intégrations ($\alpha = 2$) mais rarement davantage. Le système est dit **intégrateur** ou naturellement instable ou évolutif. L'unité K est alors celle du rapport des unités de Y sur U divisé par l'unité de temps à la puissance α

Pour faire apparaître les racines du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert on écrit :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

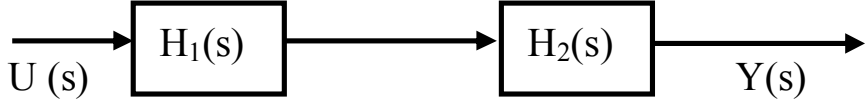
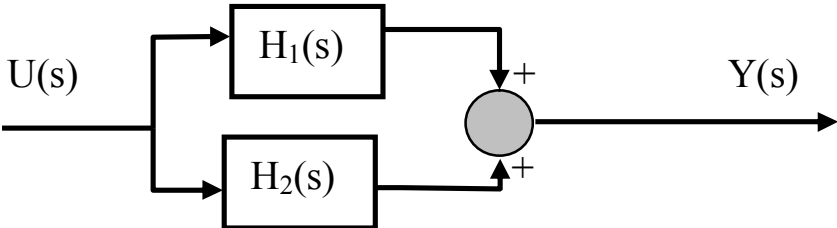
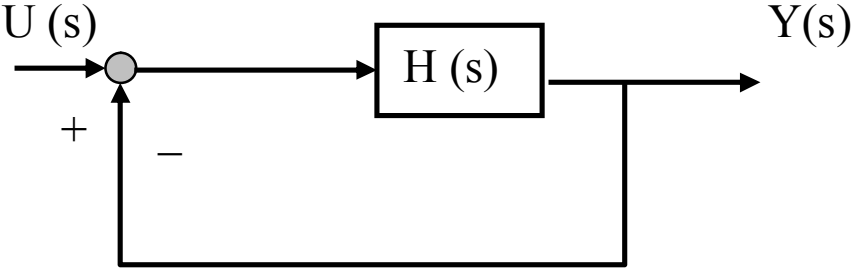
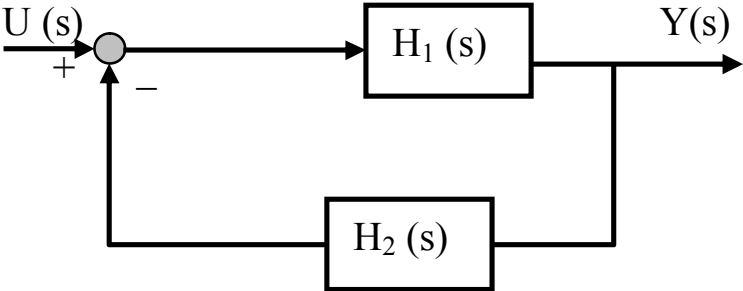
Les racines du numérateur z_i sont appelées **zéros** de la fonction de transfert.

Les racines du dénominateur p_i sont appelées **pôles** de la fonction de transfert.

La valeur n exprime l'**ordre** de la fonction de transfert.

2.3 Quelques règles algébriques sur les schémas fonctionnels.

L'étude d'un procédé à réguler nous amène à déterminer les fonctions de transfert liant les grandeurs d'entrée (grandeur réglante+grandeurs perturbatrices) et la grandeur de sortie à maîtriser ou à réguler. Le schéma fonctionnel décrit alors entièrement le système lorsqu'il comporte ces fonctions de transfert. Lorsque ce système est compliqué, il est utile de pouvoir le simplifier à l'aide de quelques règles résumées dans le tableau ci-dessous.

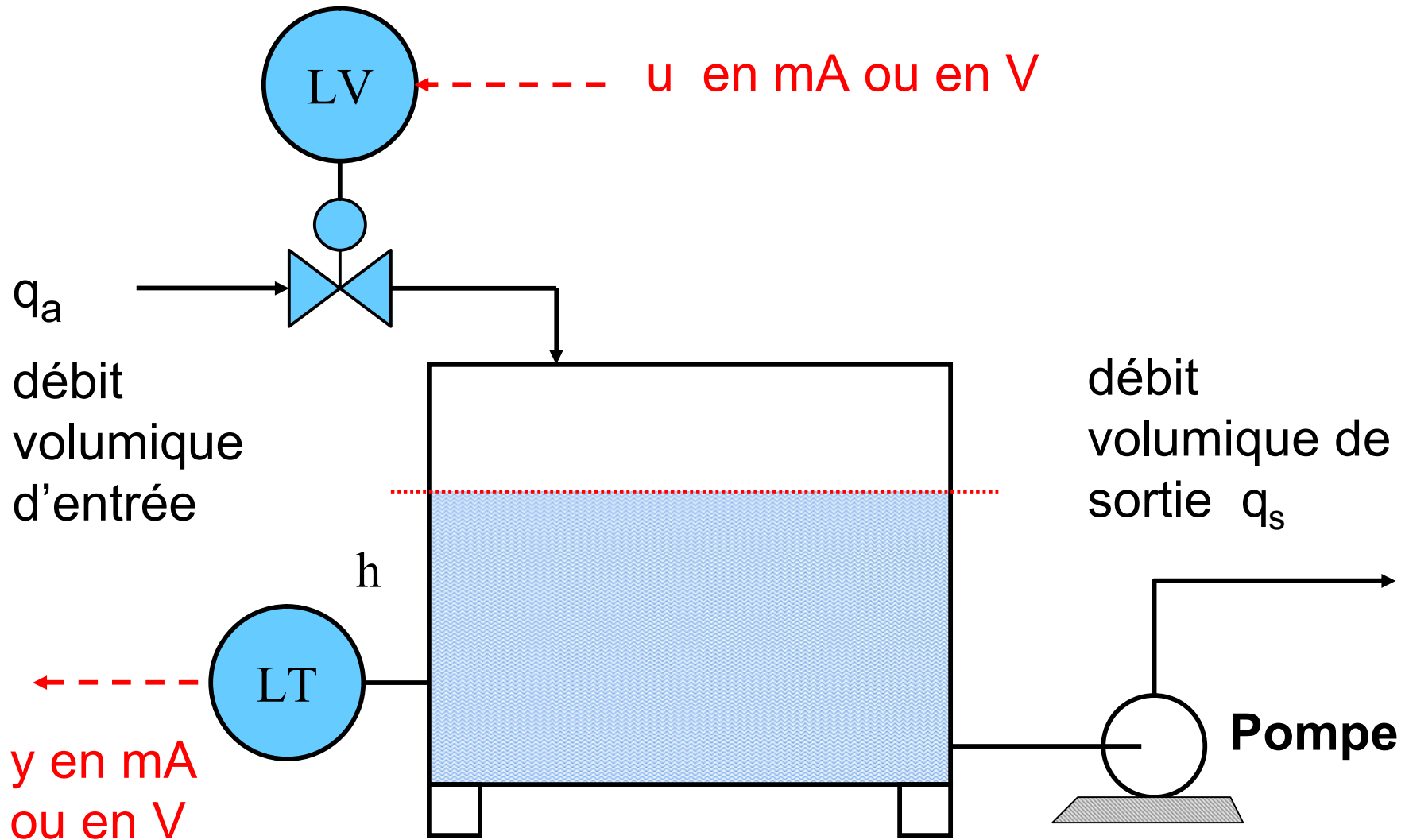
Schéma fonctionnel	F.T. $Y(z)/U(z)$
	$H_1(s) H_2(s)$
	$H_1(s) + H_2(s)$
	$\frac{H(s)}{1 + H(s)}$
	$\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$

2.4 Fonctions de transfert réglante et perturbatrice

Pour un procédé à réguler, la grandeur réglante (grandeur d'entrée) est commandable via un actionneur qui reçoit le signal de commande analogique issu du régulateur, par exemple une intensité dans l'intervalle (4,20mA). De même la grandeur réglée est mesurée par un capteur qui délivre un signal analogique généralement de même nature que le signal de commande (4,20mA). Donc pour un procédé à réguler, l'entrée commandable à considérer est le signal de commande de l'actionneur, et la sortie à considérer est le signal délivrée par le capteur qui mesure la grandeur réglante. La fonction de transfert principale entre ces deux signaux est appelée **fonction de transfert réglante**.

La fonction de transfert décrivant la relation entre l'une des autres grandeurs d'entrée perturbatrices (non commandables) et le signal analogique de mesure de la grandeur réglante est appelée **fonction de transfert perturbatrice**.

Exemple : considérons l'exemple du bac de stockage à extraction forcée : Procédé naturellement instable



Bilan de matière

$$\rho \cdot q_a - \rho \cdot q_s = \frac{d(A \cdot h \cdot \rho)}{dt}$$

$$\text{ou } q_a - q_s = \frac{d(A \cdot h)}{dt} \quad (\text{car } \rho \text{ constante})$$

$$\text{ou } \frac{q_a}{A} - \frac{q_s}{A} = \frac{dh}{dt}$$

soit en terme de déviations autour du régime nominal :

$$\frac{Q_a}{A} - \frac{Q_s}{A} = \frac{dH}{dt}$$

Par transformation de Laplace on obtient :

$$\frac{Q_a(s)}{A} - \frac{Q_s(s)}{A} = sH(s)$$

Soit :

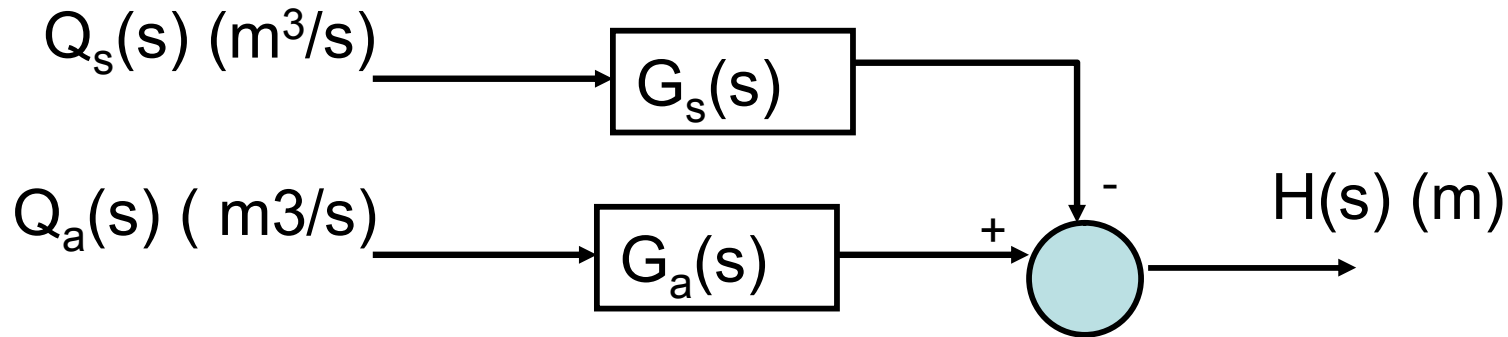
$$\frac{Q_a(s)}{sA} - \frac{Q_s(s)}{sA} = H(s)$$

$$\text{ou } Q_a(s)G_a(s) - Q_s(s)G_s(s) = H(s)$$

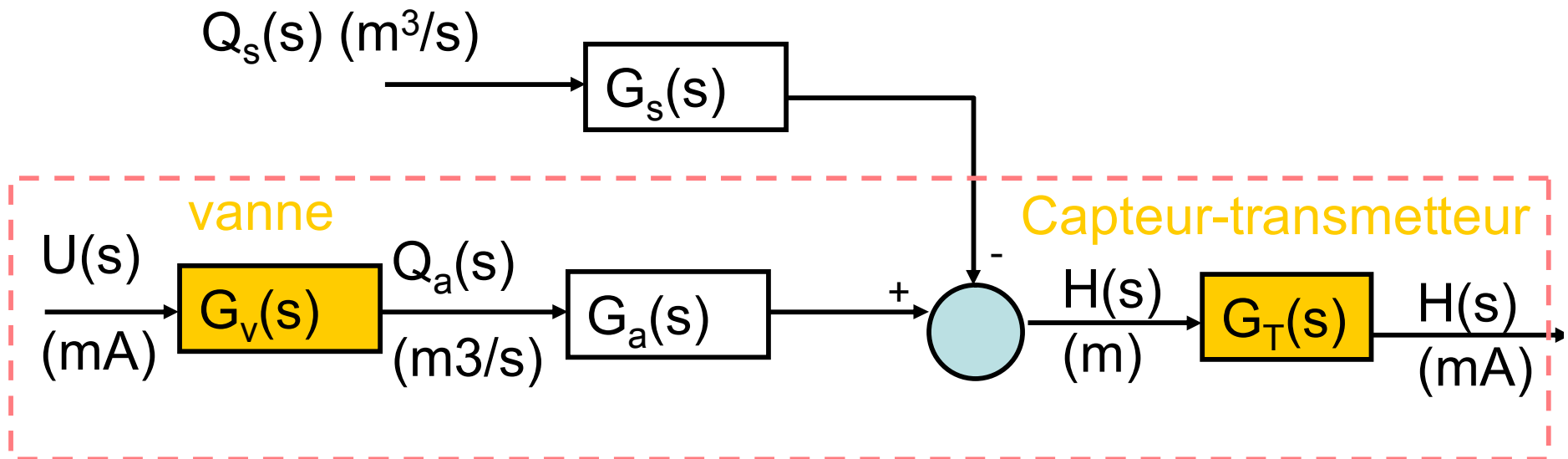
Avec :

$$G_a(s) = G_s(s) = \frac{1}{sA}$$

D'où les schémas fonctionnels suivant :



Ou bien

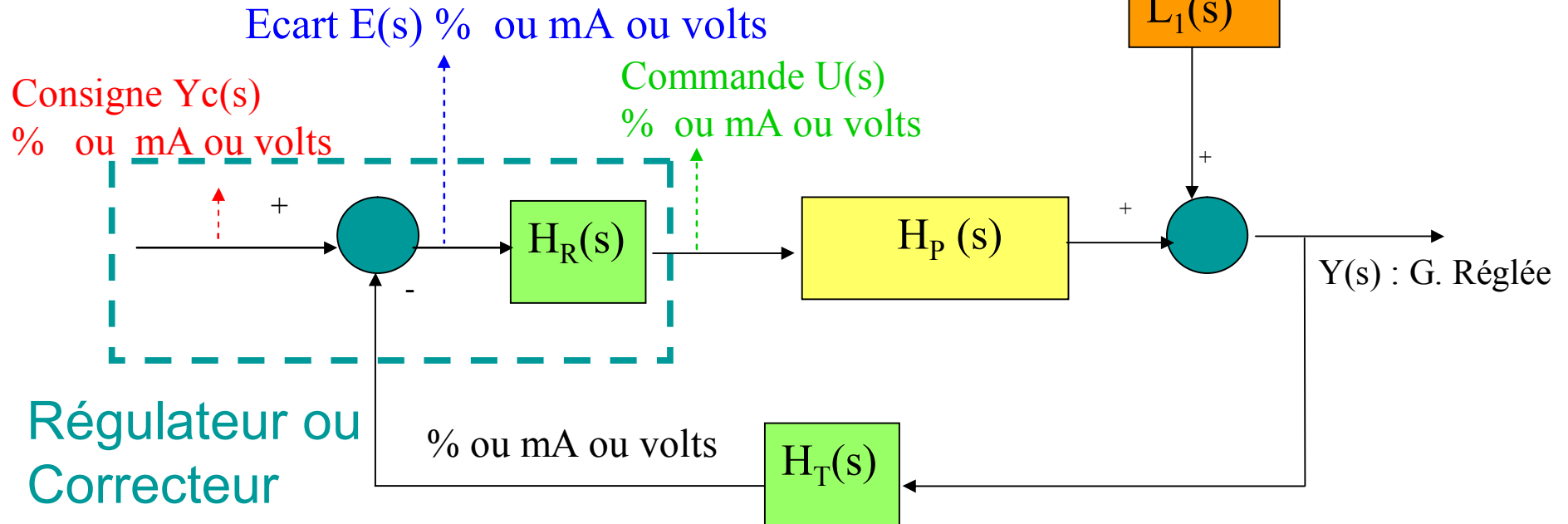


Fonction de transfert réglante = $G_v(s).G_a(s).G_T(s)$ (mA/mA)

Fonction de transfert perturbatrice = $G_s(s).G_T(s)$ (mA/(m³/s))

2.5 Fonctions de transfert FTBO et FTBF

Schéma bloc ou fonctionnel d'un système en boucle fermée



$L_1(s)$, F.T perturbatrice, (Perturbation P) \longrightarrow Grandeur réglée G.R)

$H_P(s)$, F.T procédé, (commande \longrightarrow Grandeur réglée)

$H_T(s)$, F.T du capteur-transmetteur (mA/(unité G.R))

$H_R(s)$, FT du régulateur ou correcteur

Avec :

$$H(s) = H_P(s) * H_T(s) = \text{FT réglante}$$

$$L(s) = L_1(s) * H_T(s) = \text{FT perturbatrice}$$

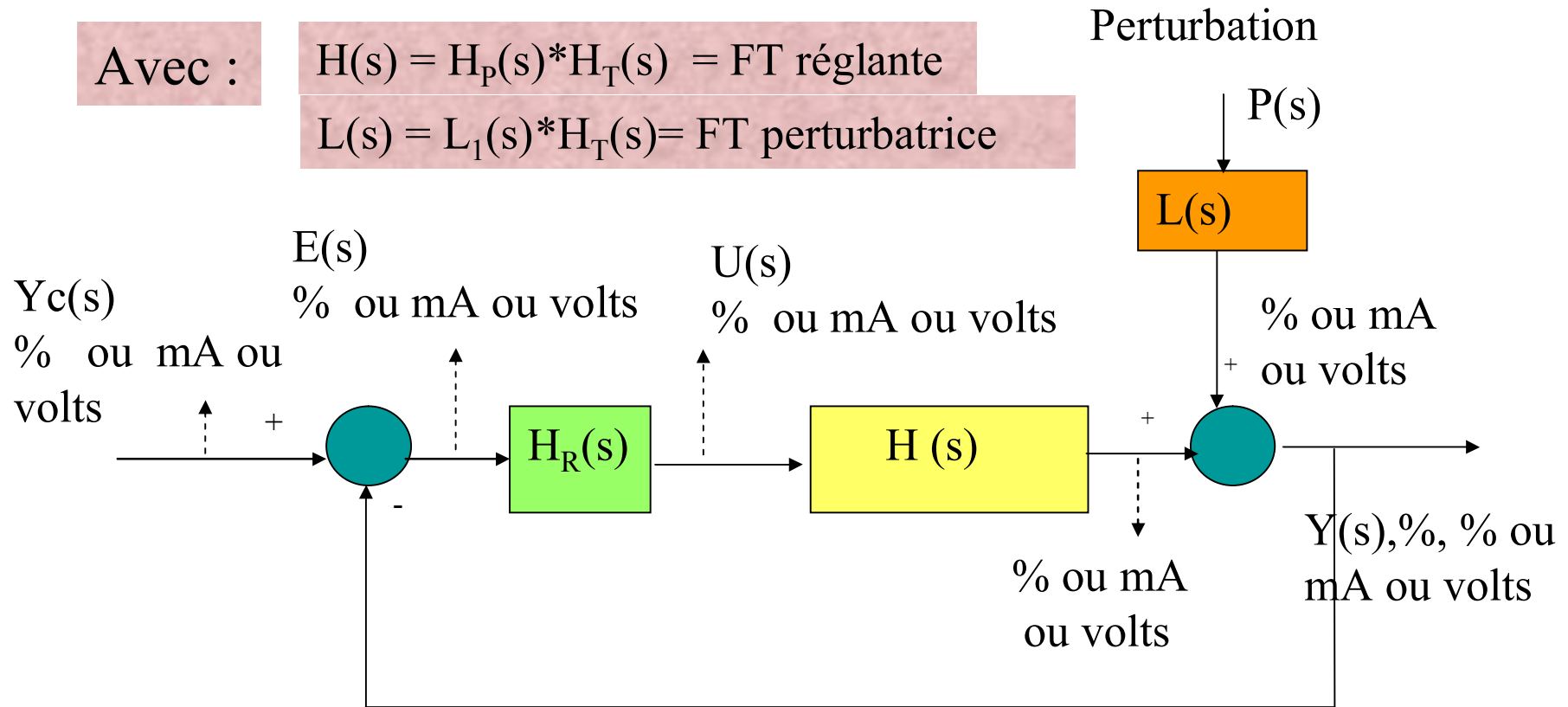


Schéma bloc ou fonctionnel d'un système en boucle fermée simplifié

On pose $FTBO(s) = H_R(s).H(s)$

On montre alors directement d'après les règles algébriques sur Les schémas fonctionnels vues précédemment que :

$$Y(s) = \frac{FTBO(s)}{1 + FTBO(s)} Y_c(s) + \frac{L(s)}{1 + FTBO(s)} P(s)$$

Ou encore :

$$Y(s) = FTBF(s).Y_c(s) + \frac{L(s)}{1 + FTBO(s)} P(s)$$

avec :

$$FTBF(s) = \frac{FTBO(s)}{1 + FTBO(s)}$$