Chapitre 2 : Systèmes ou procédés linéaires fondamentaux

1. Systèmes linéaires fondamentaux
2. Réponses indicielles
3. Réponses impulsionnelles
4. Réponses à une rampe
5. Réponses harmoniques ou fréquentielles

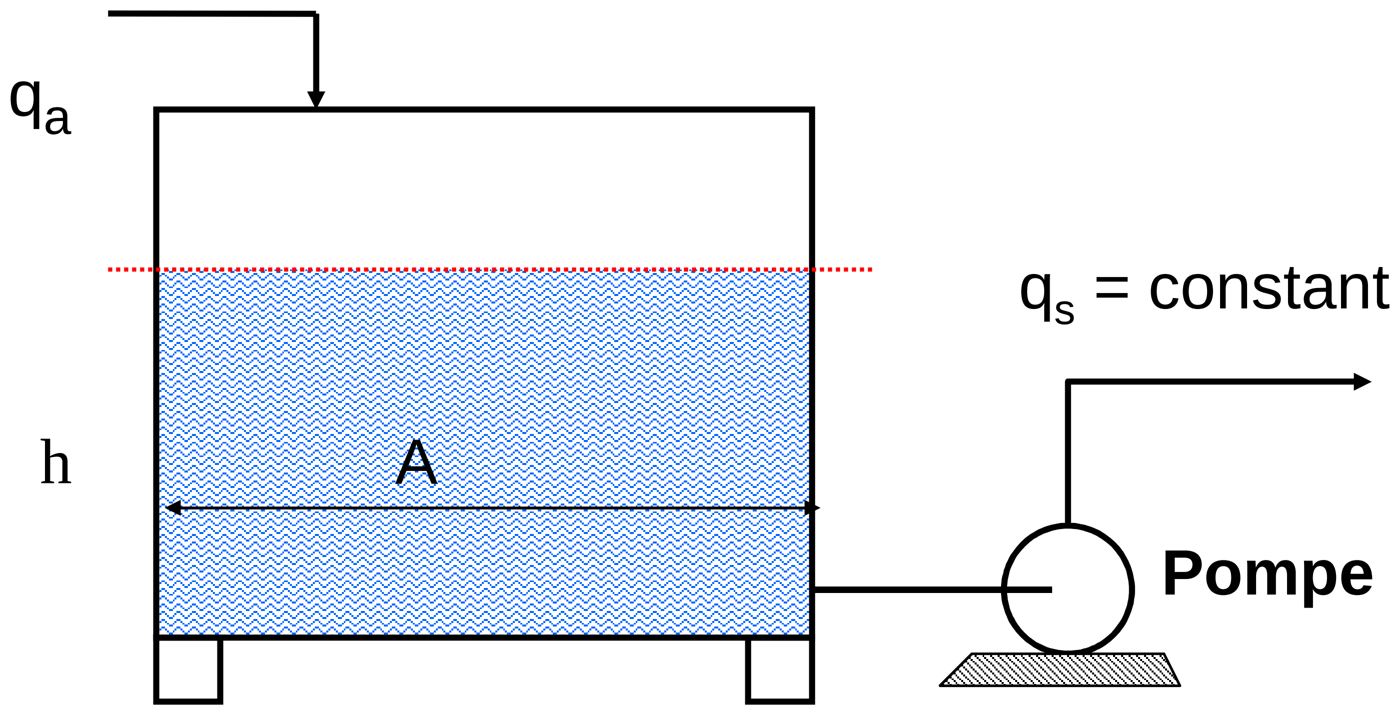
1-Systèmes ou procédés linéaires fondamentaux

1.1- Système intégrateur

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ku(t) \xrightarrow{\text{C.I. nulles}} H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s}$$

Exemple : le réservoir à extraction forcée

$A = 4m^2$;Régime nominal ou point de fonctionnement : $h_o = 2m$; $q_{a0}=q_{so}=0.02\ m^3.s^{-1}$.



Bilan de matière

$$\rho.q_a - \rho.q_s = \frac{d(A.h.\rho)}{dt}$$

ou $$q_a - q_s = \frac{d(A.h)}{dt} \quad (\text{car } \rho \text{ constante })$$

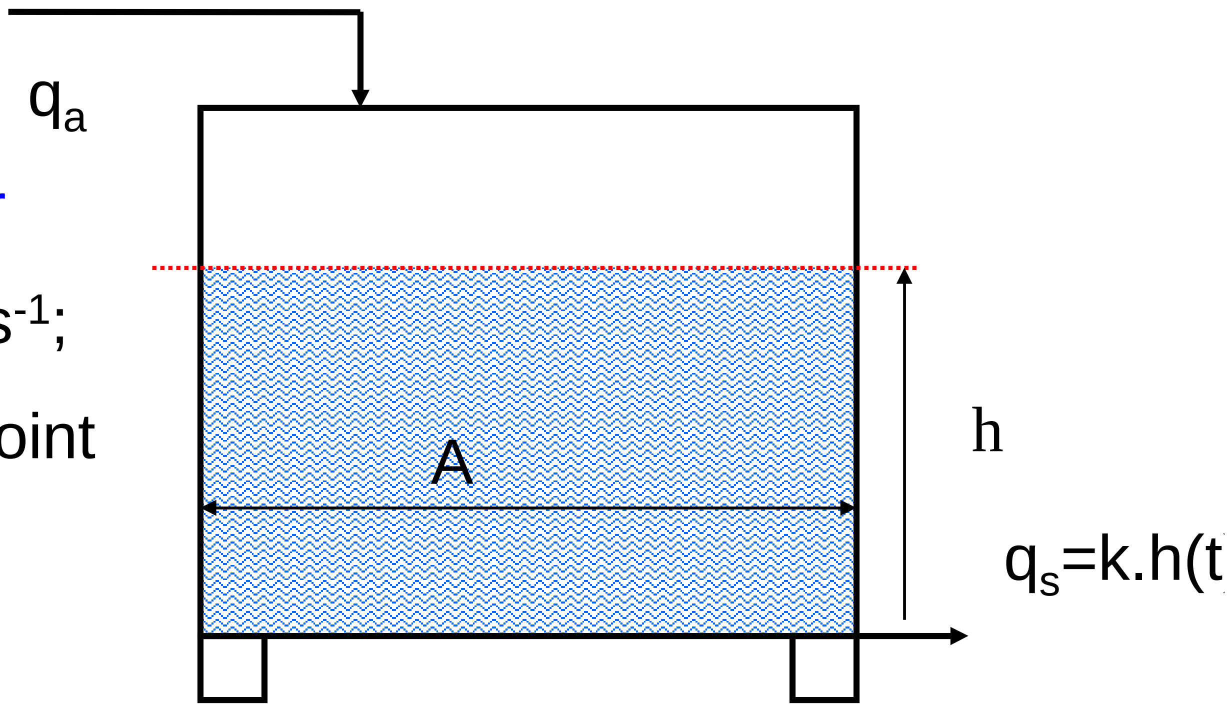
ou $$\frac{q_a}{A} - \frac{q_s}{A} = \frac{dh}{dt}$$

soit en terme de déviations autour du régime nominal $Q_s = \mathbf{0}$ **car** q_s **est constant :**

$$\frac{Q_a}{A} = \frac{dH}{dt} \Rightarrow \frac{H(s)}{Q_a(s)} = G(s) = \frac{1}{As} = \frac{K}{s} = \frac{0.25}{s}$$

1.2- Système du premier ordre

$$T.\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Ku(t) \xrightarrow{\text{C.I. nulles}} H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{1+Ts}$$



Exemple : le réservoir

$A=4\ m^2$; $k= 0.08\ m^2.s^{-1}$;

Régime nominal ou point de fonctionnement :

$h_o= 2m$; $q_{a0}=q_{so}=0.02\ m^3.s^{-1}$.

Bilan de matière

$$\rho.q_a - \rho.q_s = \frac{d(A.h.\rho)}{dt}$$

ou $$q_a - q_s = \frac{d(A.h)}{dt} \quad (\text{car } \rho \text{ constante})$$

ou $$\frac{q_a}{A} - \frac{q_s}{A} = \frac{dh}{dt}$$

soit en terme de déviations autour du régime nominal et sachant que $q_s = \mathbf{kh(t)}$ **:**

$$\frac{Q_a}{A} - \frac{k\,H}{A} = \frac{dH}{dt} \Rightarrow \frac{A}{k}\frac{dH}{dt} + H = \frac{Q_a}{k} \Rightarrow G(s) = \frac{H(s)}{Q_a(s)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{A}{k}s} = \frac{K}{1+Ts}$$

Avec $$K = \frac{1}{k} = 12.5 \text{ et } T = \frac{A}{k} = 50 \Rightarrow G(s) = \frac{H(s)}{Q_a(s)} = \frac{12.5}{1+50s}$$

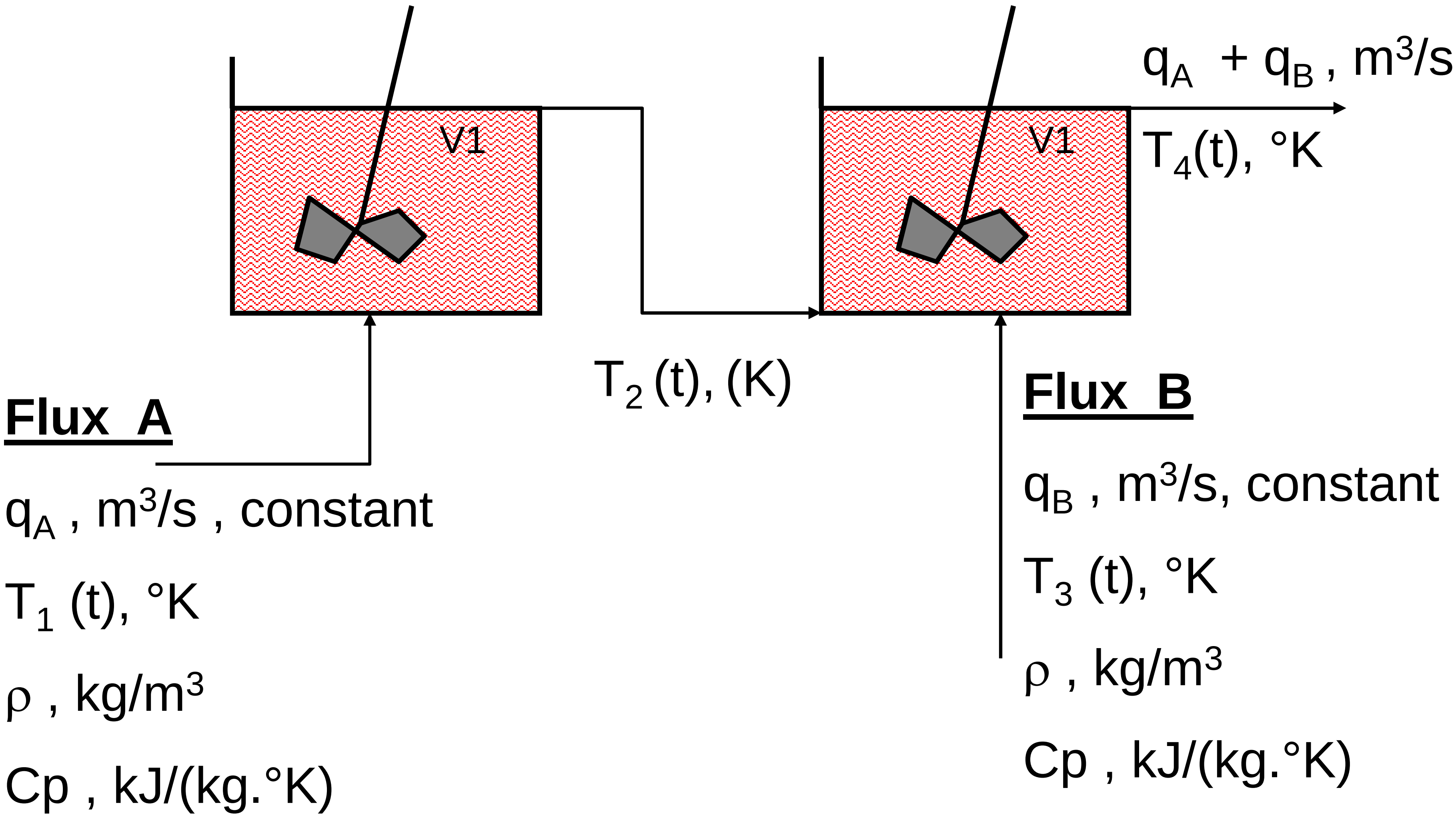
1.3- Système du second ordre

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{dy^2(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_o}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Ku(t)$$

C.I. nulles

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2}+\dfrac{2\xi}{\omega_o}s+1}$$

ζ est appelé le facteur d'amortissement, $\omega_0=2\pi f_0$ est la pulsation propre.



Exemple : bacs thermiques en série

Bilan thermique :

$$q_A \rho Cp T_1(t) - q_A \rho Cp T_2(t) = \frac{d(V_1 \rho Cp T_2)}{dt} = V_1 \rho Cp \frac{d(T_2)}{dt} \qquad (1)$$

$$q_A \rho Cp T_1(t) + q_B \rho Cp T_3(t) - (q_A + q_B) \rho Cp T_4(t) = \frac{d(V_2 \rho Cp T_4)}{dt} = V_2 \rho Cp \frac{d(T_4)}{dt} \qquad (2)$$

On constate que les équations du modèle sont linéaires. Donc pas de termes à linéariser et les équations (1) et (2) s'écrivent alors en termes de déviations autour du régime nominal :

$$q_A \rho Cp \Gamma_1(t) - q_A \rho Cp \Gamma_2(t) = V_1 \rho Cp \frac{d(\Gamma_2)}{dt} \qquad (3)$$

$$q_A \rho Cp \Gamma_1(t) + q_B \rho Cp \Gamma_3(t) - (q_A + q_B) \rho Cp \Gamma_4(t) = V_2 \rho Cp \frac{d(\Gamma_4)}{dt} \qquad (4)$$

Où $\quad T(t) = T_o + \Gamma(t)$

Par transformation de Laplace de (2) et (3) et sachant que les C.I sont nulles , on obtient :

$$\Gamma_2(s) = \frac{1}{\theta_1 s + 1}\Gamma_1(s) \quad (4)$$

$$\Gamma_4(s) = \frac{K_1}{\theta_2 s + 1}\Gamma_2(s) + \frac{K_2}{\theta_2 s + 1}\Gamma_3(s) \quad (5)$$

$$K_1 = \frac{q_A}{q_A + q_B} \;,\; K_2 = \frac{q_B}{q_A + q_B}$$

$$\theta_1 = \frac{V_1}{q_A} \text{(seconds)} \;,\; \theta_2 = \frac{V_2}{q_A + q_B} \text{(seconds)}$$

En substituant (4) dans (5) , on obtient :

$$\Gamma_4(s) = \frac{K_1}{(\theta_1 s + 1)(\theta_2 s + 1)}\Gamma_1(s) + \frac{K_2}{\theta_2 s + 1}\Gamma_3(s)$$

On pose : $H_{41}(s) = \frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{K_1}{(\theta_1 s + 1)(\theta_2 s + 1)}$ et $H_{43}(s) = \frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_3(s)} = \frac{K_2}{\theta_2 s + 1}$

$H_{41}(s)$ et $H_{43}(s)$ sont respectivement les F.T liant T_4 à T_1 et T_4 à T_3.

$$H_{41}(s) = \frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{K_1}{(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)} = \frac{K_1}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2} + \dfrac{2\xi}{\omega o} s + 1}$$

$$\omega o = \frac{1}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \omega_o = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \frac{1}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}}$$

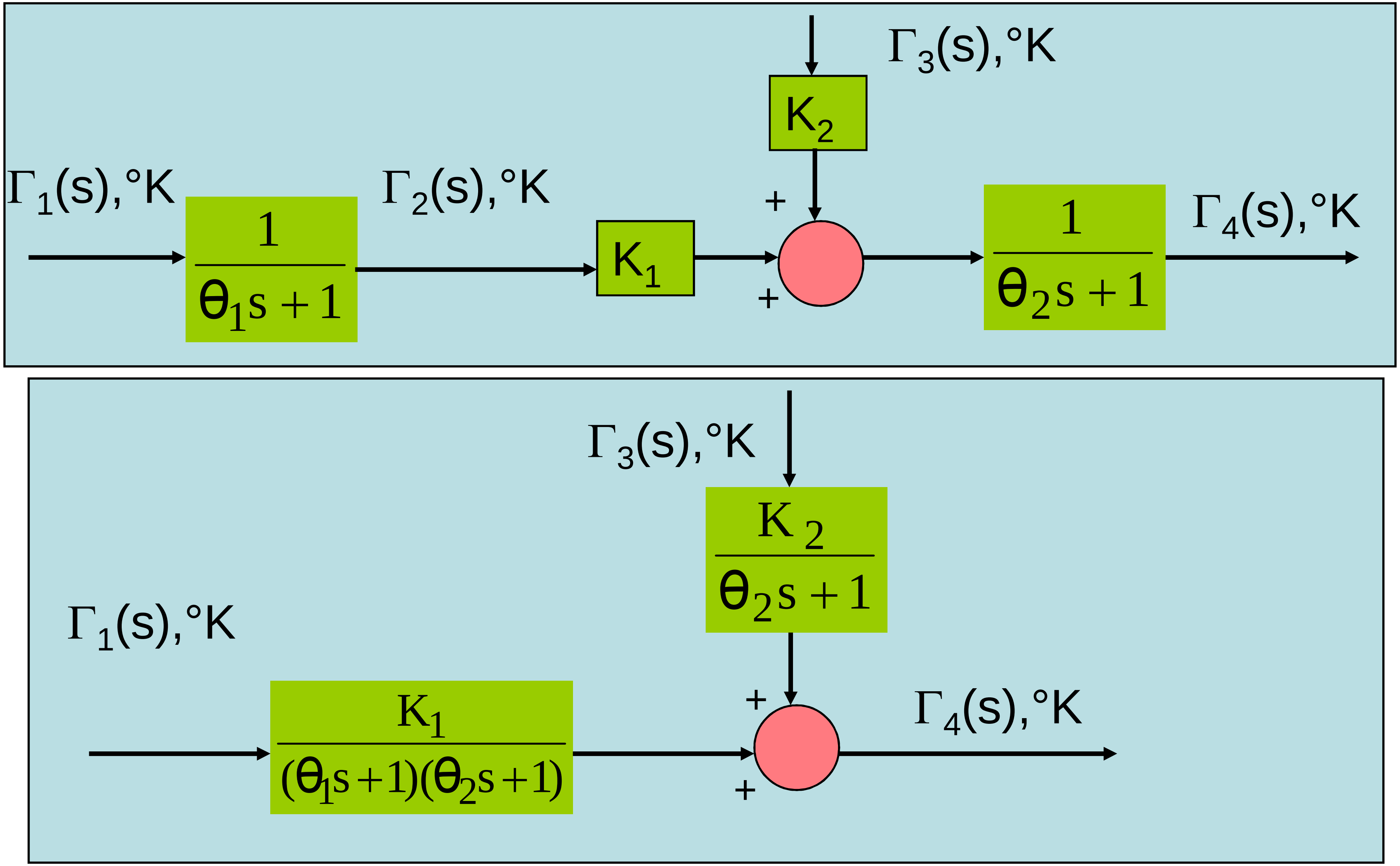
$$H_{41}(s) = \frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{K_1}{(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)} = \frac{K_1}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2} + \dfrac{2\xi}{\omega o} s + 1}$$

est du 2eme ordre

$$H_{43}(s) = \frac{\Gamma_4(s)}{\Gamma_3(s)} = \frac{K_2}{\theta_2 s + 1}$$

est du 1er ordre

Schéma fonctionnel des deux cuves thermiques en séries

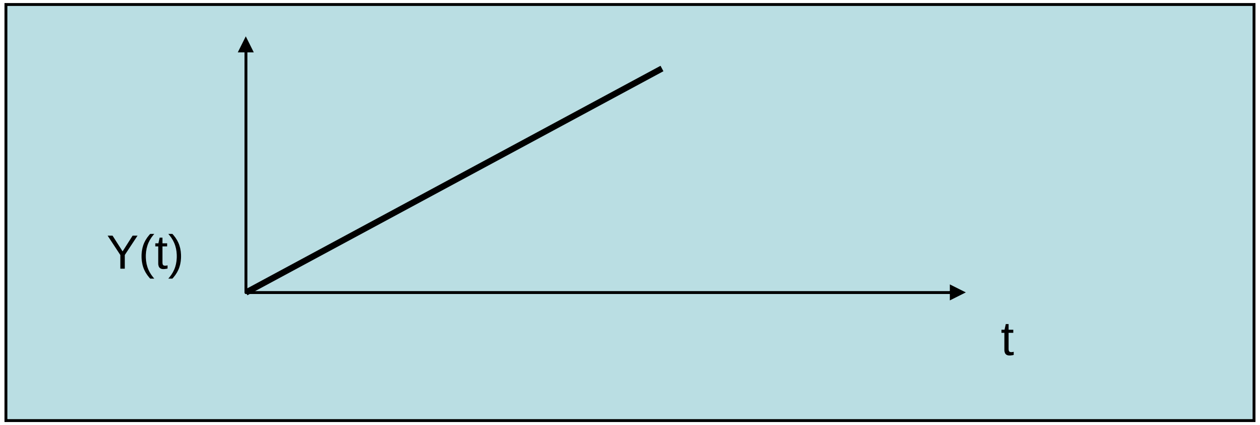


2- Réponses indicielles

La réponse indicielle est la réponse y(t) d'un système ou procédé quand son entrée varie d'un échelon unitaire U(t)=1.

2.1- Système intégrateur

$$\begin{cases} H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{s} \\ \\ U(t) = 1 \Rightarrow U(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{s} U(s) = \frac{K}{s^2} \Rightarrow Y(t) = K.t$$



2.2- Système du premier ordre

$$\begin{cases} H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{1+Ts} \\ U(t) = 1 \Rightarrow U(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{(1+Ts)} U(s) = \frac{K}{s(1+Ts)} \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{\frac{1}{T}+s}$$

$$\Rightarrow Y(t) = K - Ke^{(-\frac{t}{T})} = K\,(1-e^{(-\frac{t}{T})}) \Rightarrow \left.\frac{dY(t)}{dt}\right|_{(t=0)} = \frac{K}{T} \quad \text{(tangente à l'origine)}$$

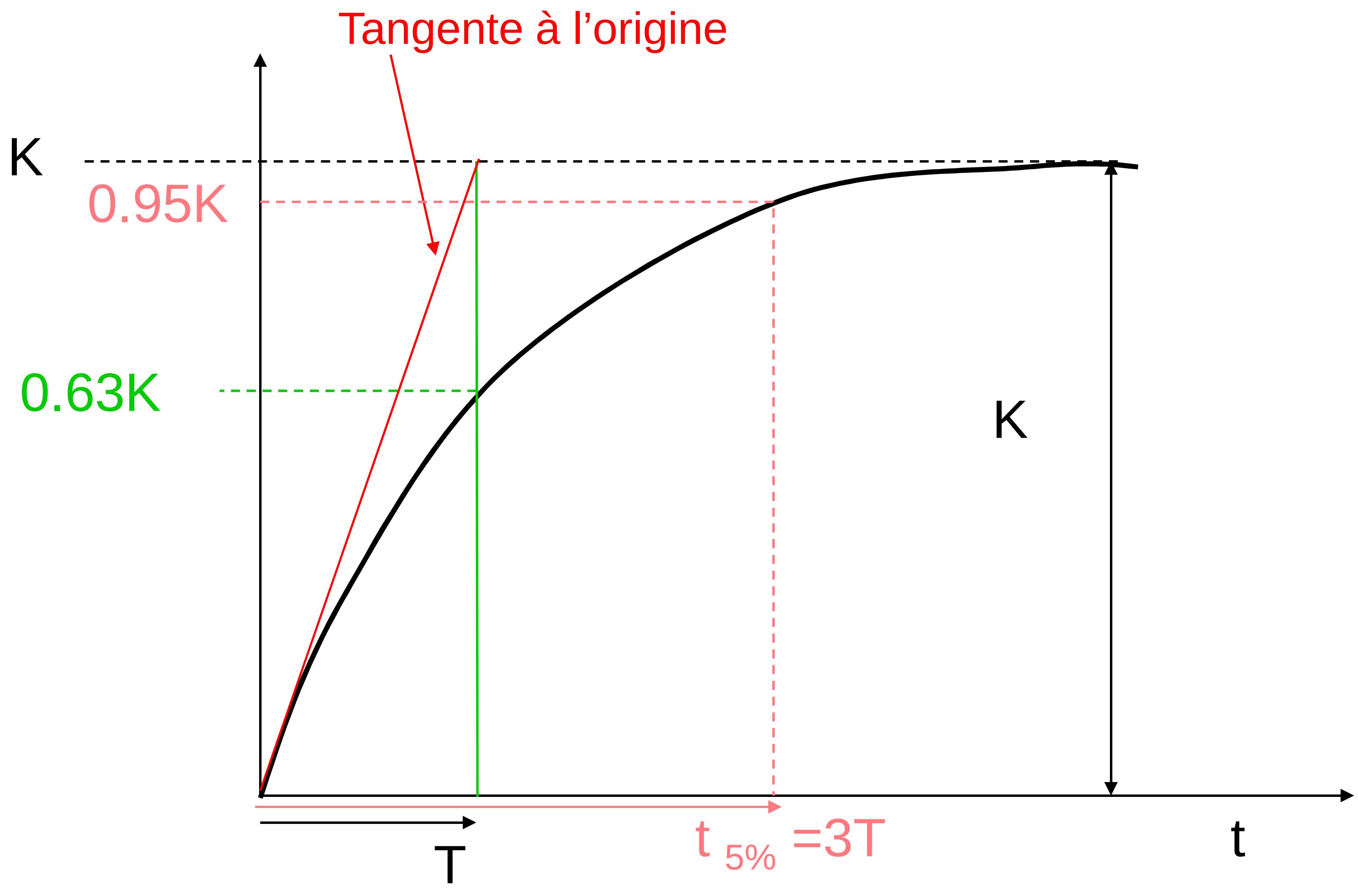
$$\boxed{Y(t = T) = K\,(1 - e^{(-1)}) = 0.63K}$$

La constante du temps T est le temps nécessaire pour atteindre 63% de la valeur finale.

$$\boxed{Y(t=3.T) = K\,(1-e^{(-3)}) \approx 0.95K}$$

Pour un système du 1er ordre , le temps de réponse à 5% est donc $t_{5\%} = 3.T$.

Réponse indicielle d'un système ou procédé du premier ordre



2.3- Système du second ordre

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega_o} s + 1}$$

Le comportement dynamique (réponse temporelle) d'un système du premier ordre dépend uniquement de la valeur de sa constante du temps T. Celui d'un second ordre dépend de sa pulsation ω_o et essentiellement de son coefficient d'amortissement ζ que l'on suppose positif.

L'étude des racines du dénominateur de la fonction de transfert H(s) permet de connaître ce comportement.

$$1+2.\frac{\zeta}{\omega_0}s+\frac{s^2}{\omega_0{}^2}=0 \quad \text{ou} \quad \omega_0{}^2+2.\zeta\omega_0 s+s^2 \quad =0$$

$$\Delta'=(\zeta\omega_0)^2-\omega_0{}^2=\omega_0{}^2(\zeta^2-1)$$

<u>Réponse indicielle</u> :

$$Y(s)=\frac{K}{1+2.\frac{\zeta}{\omega_0}s+\frac{s^2}{\omega_0{}^2}}.\frac{1}{s}=\frac{K}{s}-\frac{K(s+2\zeta\omega_0)}{s^2+2\zeta\omega_0+\omega_0{}^2}=\frac{K}{s}-KF(s)$$

Et par transformée inverse on obtient : Y(t)=K(1-f(t))

Premier cas : Régime apériodique sans dépassement : ($\zeta \geq 1$)

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow \xi \geq 1 \Rightarrow 2 \ \text{pôles réels} \ \ s_2 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_1 + s_2 = -2\zeta\omega_0$$

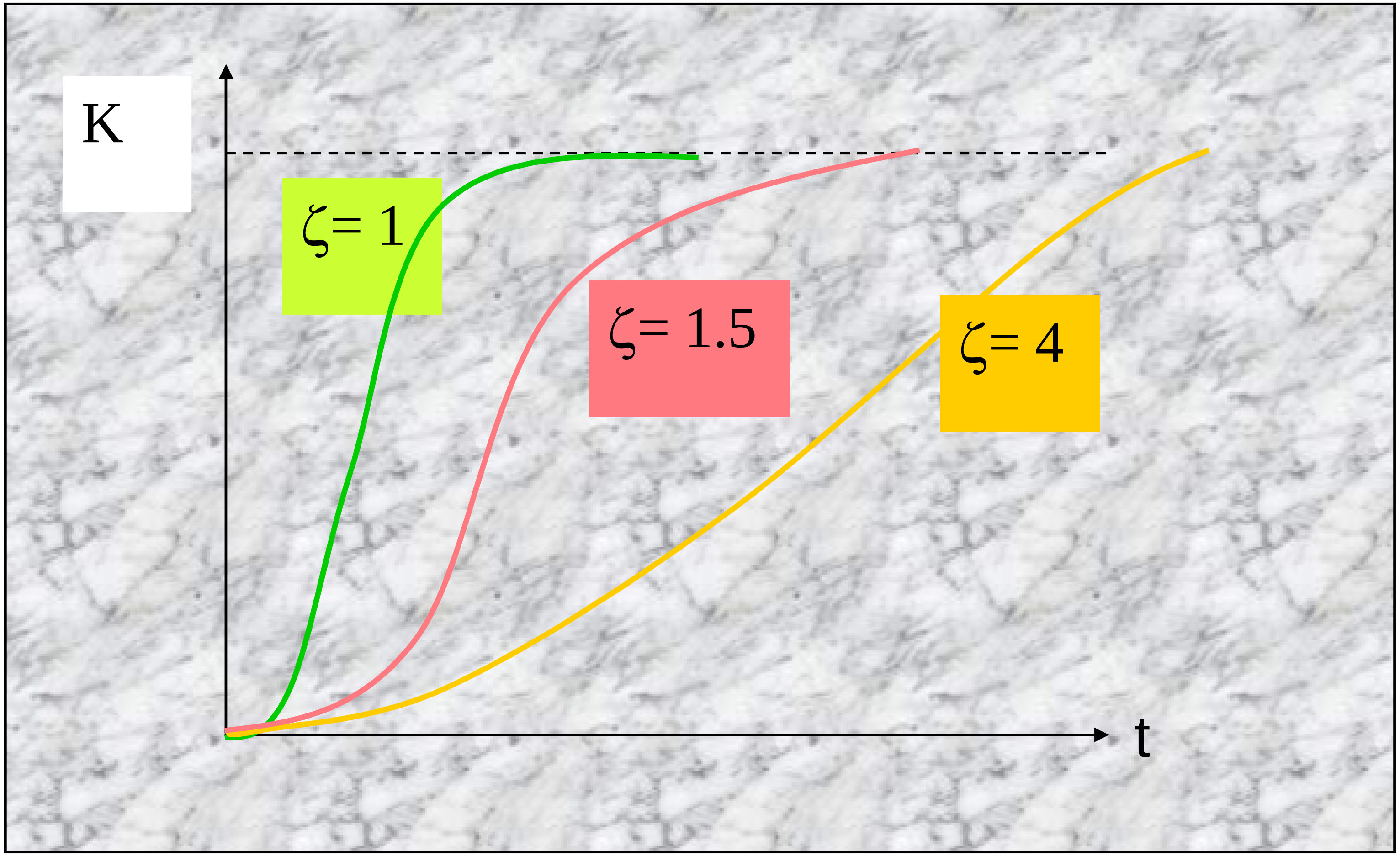
$$F(s) = \frac{s-(s_1+s_2)}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{(s_2-s_1)}\left\{\frac{s_2}{s-s_1} - \frac{s_1}{s-s_2}\right\} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{(s_2-s_1)}\left\{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right\}$$

$$\boxed{\text{et} \qquad Y(t) = K\left[1 - \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}}\left\{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right\}\right]}$$

On peut vérifier que : $Y(0)=0$, $Y(\infty) = K$ et $\frac{dY(0)}{dt} = 0 \Rightarrow$ tangente horizontale en $t = 0$.

On vérifie aussi que $\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(s_1 / s_2)}{s_2 - s_1} \Rightarrow$

Un seul point d'inflexion. D'où la réponse indicielle d'un second ordre $\xi \geq 1$:



Dans le cas où $\zeta = 1$:

$$F(s) = \frac{s+2\omega_0}{(s+\omega_0)^2} = \frac{1}{s+\omega_0} + \frac{\omega_0}{(s+\omega_0)^2} \Rightarrow f(t) = e^{-\omega_0 t} + \omega_0 t e^{-\omega_0 t}$$

Soit :

$$Y(t) = K(1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t})$$

$$\text{donc} \quad Y(0) = 0, \quad \frac{dY(0)}{dt} = K\omega_0^2 .t.e^{-\omega_0 t} = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2Y(t)}{dt^2} = (1 - \omega_0 .t)\, K\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} = 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} \quad \text{(posistion du point d' inflexion)}$$

Deuxième cas : Régime oscillatoire avec dépassement : ($0 < \zeta < 1$)

Dans ce cas nous avons 2 pôles complexes :

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \;;\; s_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$F(s) = \frac{s-(s_1+s_2)}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{s+\zeta\omega_0+\zeta\omega_0}{(s+\zeta\omega_0)^2+\omega_0{}^2(1-\zeta^2)} =$$

$$\frac{s+\zeta\omega_0}{(s+\zeta\omega_0)^2+\omega_0{}^2(1-\zeta^2)} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_0)^2+\omega_0{}^2(1-\zeta^2)} \quad \text{soit :}$$

$$f(t) = \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t)e^{-\zeta\omega_0 t} + \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t)\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}$$

$$= A.\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\;t + \varphi)e^{-\zeta\omega_0 t}$$

D'où :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Arccos}(\zeta) = \varphi$$

$$Y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \mathrm{ar}\cos(\zeta))\right]$$

La réponse est donc pseudo-périodique de pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

et elle est comprise entre les deux courbes :

$$K + K\frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{et} \quad K - K\frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Sans amortissement $\zeta = 0$, on a : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

d'où le nom de pulsation propre non amortie ou pulsation naturelle donnée à ω_0

La pulsation propre et la fréquence propre sont données par :

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 2\pi f_n = 2\pi f_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow f_n = f_0\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \text{fréquence prore}$$

Le premier dépassement a lieu quand $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

d'où :

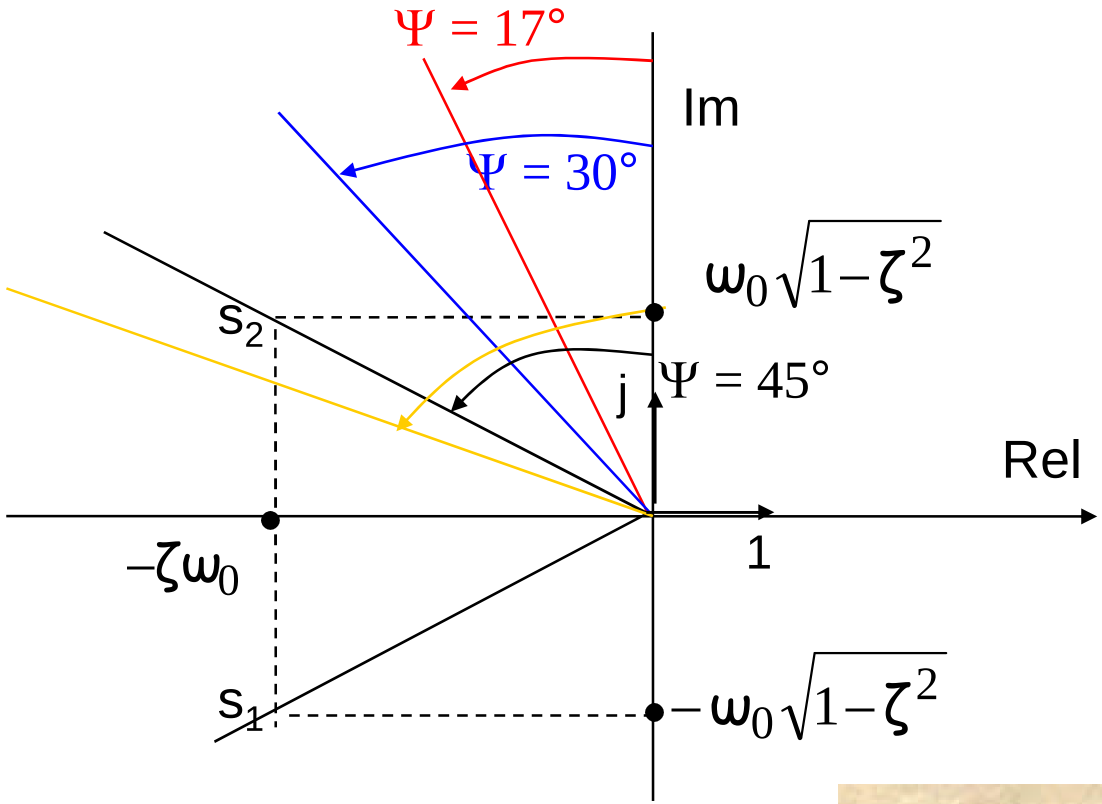
$$D_1 = -K.\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\sin(\pi+\theta) = K.\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\sin(\theta) = Ke^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

car : $\sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}$ *puisque* $\theta = \arccos\zeta \Rightarrow \cos\theta = \zeta$

d'où : $$D\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100$$

Dans le cas d'un régime oscillatoire avec dépassement ($0 < \zeta < 1$), les deux pôles sont complexes :

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$s_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$



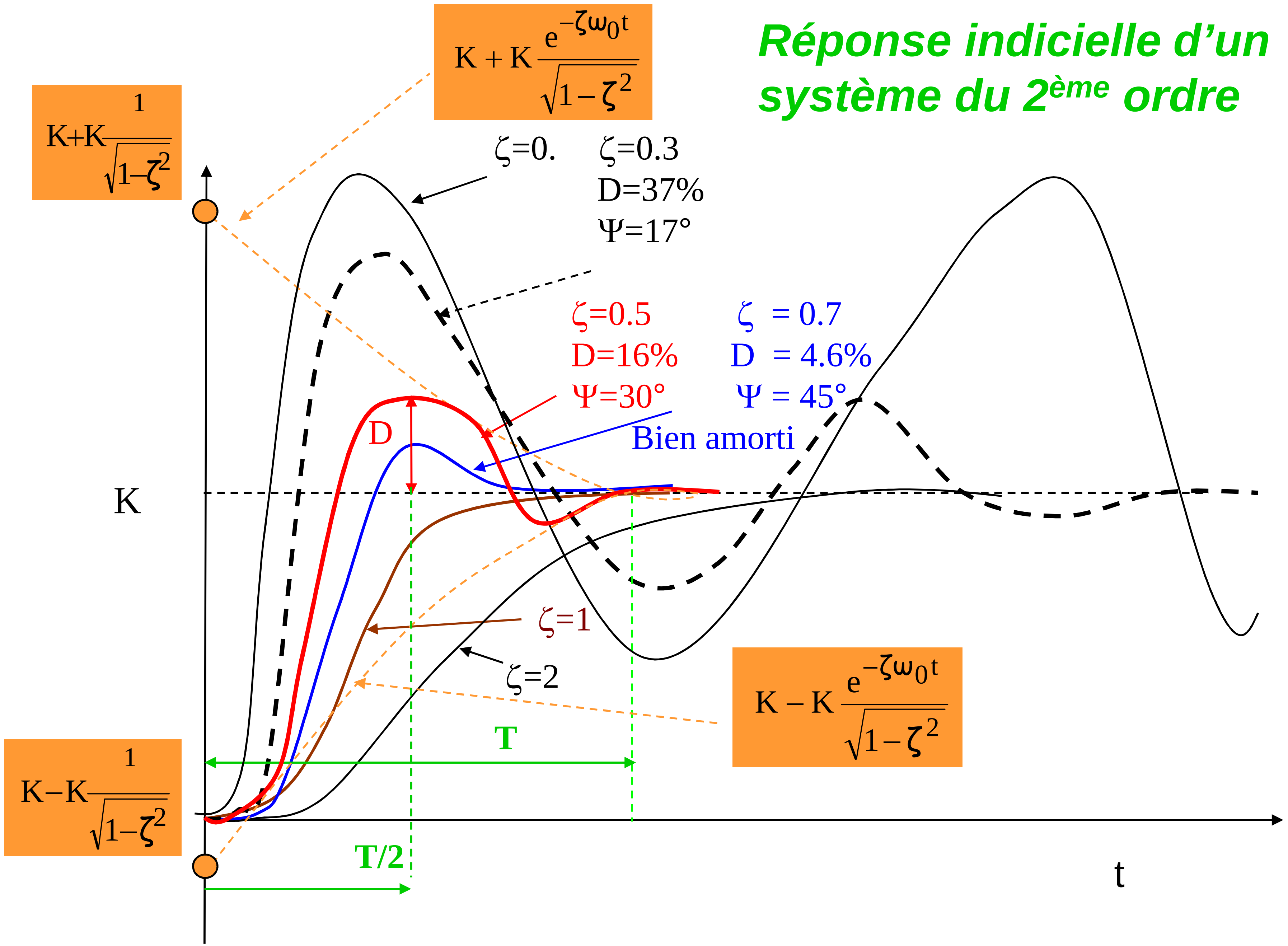
$$\sin\Psi = \frac{\zeta\omega_0}{\sqrt{(\zeta\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{(1-\zeta^2)})^2}} = \zeta$$

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

Pôles d'un second ordre dans le plan complexe

Réponse indicielle d'un système du 2ème ordre



Selon les valeurs de Ψ, un système du second ordre est trop oscillant quand il est mal amorti, c'est-à-dire quand ζ est trop petit. Un choix convenable pour ζ est ζ=0.7, donc Ψ=45°. Il faudra éviter de descendre en dessous de ζ=0.5 , soit Ψ=30°. On montre que :

- $t_M = \dfrac{1}{\omega_0\sqrt{(1-\zeta^2)}}(\pi - \mathrm{Ar}\cos(\zeta))$

- temps de réponse à n% $(\zeta < 0.7)$: $t_{n\%} \approx \dfrac{1}{\omega_0 \zeta}\mathrm{Log}_e(100/n)$.

- pour $\zeta = 0.5$, la réponse comporte une oscillation complète et considérée comme optimale.

3. Réponses impulsionnelles

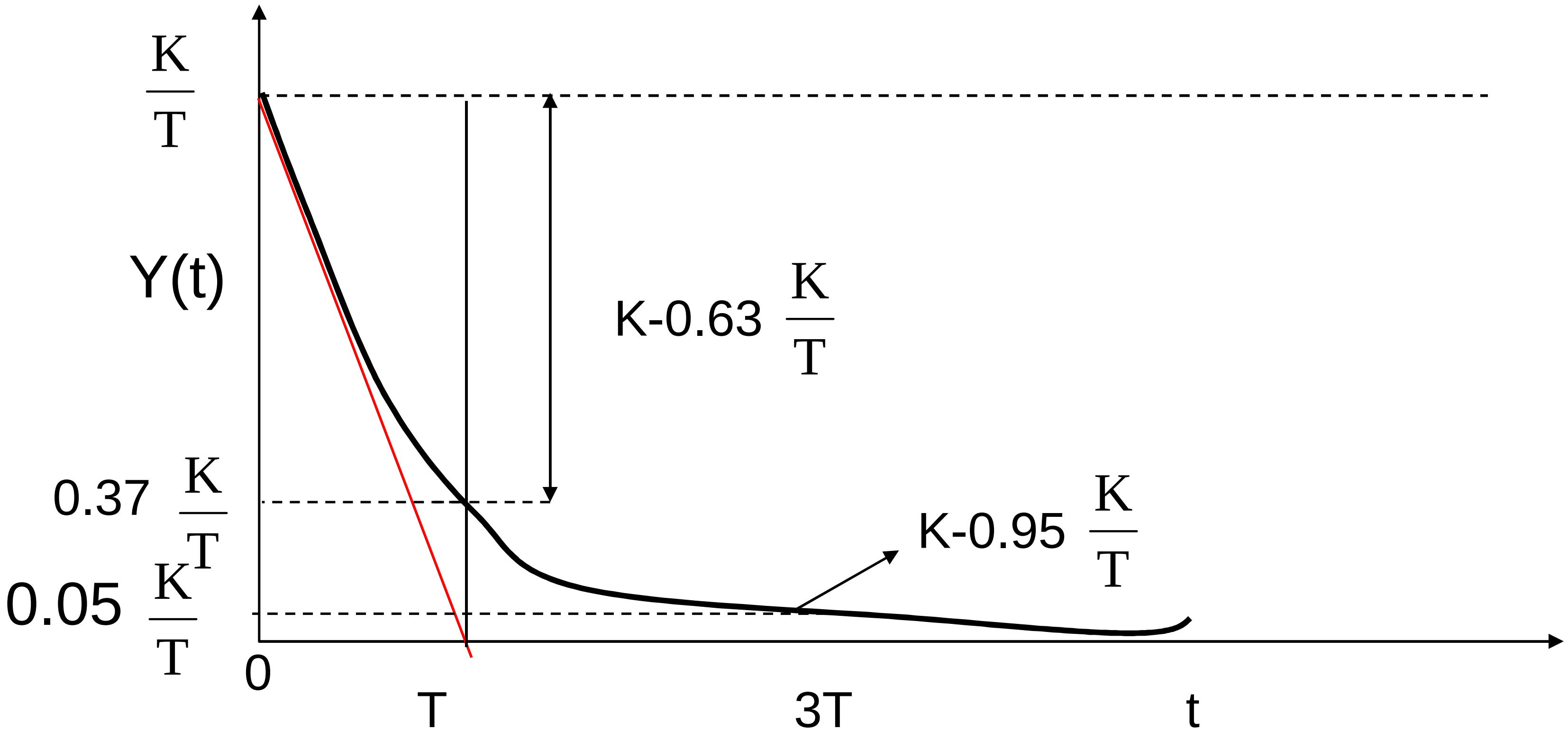
La réponse impulsionnelle est la réponse y(t) d'un système ou procédé quand son entrée est une impulsion de Dirac U(t) = δ(t) dont la transformée de Laplace est 1.

3.1- Système intégrateur

$$\begin{cases} H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{s} \\ U(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{s} U(s) = \frac{K}{s} \Rightarrow Y(t) = K$$

3.2- Système du premier ordre

$$Y(s) = \frac{K}{(1+Ts)}U(s) = \frac{K}{(1+Ts)} = \frac{K}{T}\frac{1}{\frac{1}{T}+s} \Rightarrow Y(t) = \frac{K}{T}e^{(-\frac{t}{T})}$$



3.3- Système du second ordre

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2} + \dfrac{2\xi}{\omega_o}s + 1}}$$

$$Y(s) = \frac{K}{1 + 2.\dfrac{\zeta}{\omega_0}s + \dfrac{s^2}{\omega_0^2}} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2}$$

Premier cas : Régime apériodique sans dépassement : ($\zeta \geq 1$)

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow \xi \geq 1 \Rightarrow 2 \text{ pôles réels } \quad s_2 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$Y(s) = \frac{K\omega_0^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_0 + \omega_0^{\ 2}} = \frac{K\omega_0^{\ 2}}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$Y(s) = \frac{K\omega_o}{2.\sqrt{\xi^2 - 1}} . \left[\frac{1}{(s - s_2)} - \frac{1}{(s - s_1)}\right] \Rightarrow Y(t) = \frac{K\omega_o}{2.\sqrt{\xi^2 - 1}} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t})$$

Cas $\zeta = 1$

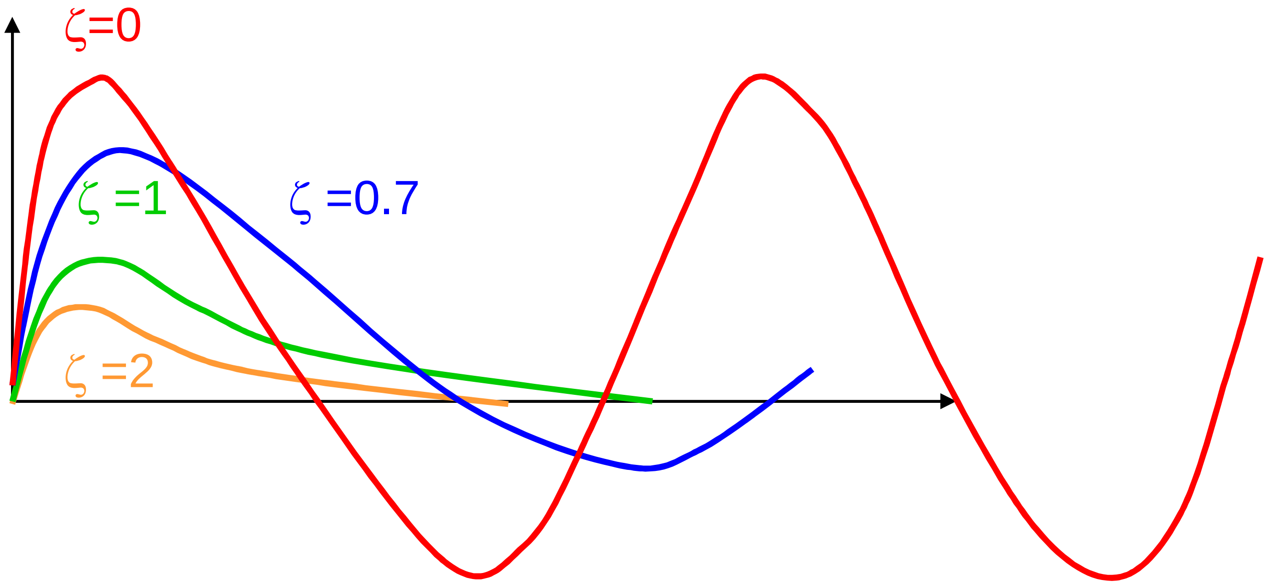
$$Y(s) = \frac{K\omega_0^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_0 + \omega_0^{\ 2}} = \frac{K\omega_0^{\ 2}}{(s + \omega_0)^2} \Rightarrow Y(t) = K\,\omega_0^{\ 2}\, t\, e^{-\omega o t}$$

Deuxième cas : Régime oscillatoire avec dépassement : $(0 < \zeta < 1)$

Dans ce cas nous avons 2 pôles complexes :

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \; ; s_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$Y(s) = \frac{K\omega_o^2}{(s+\zeta\omega_0)^2 + \omega_o^2(1-\zeta^2)} \Rightarrow Y(t) = \frac{K\omega_o}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega o.t.\sqrt{1-\xi^2})$$



4. Réponses à une rampe

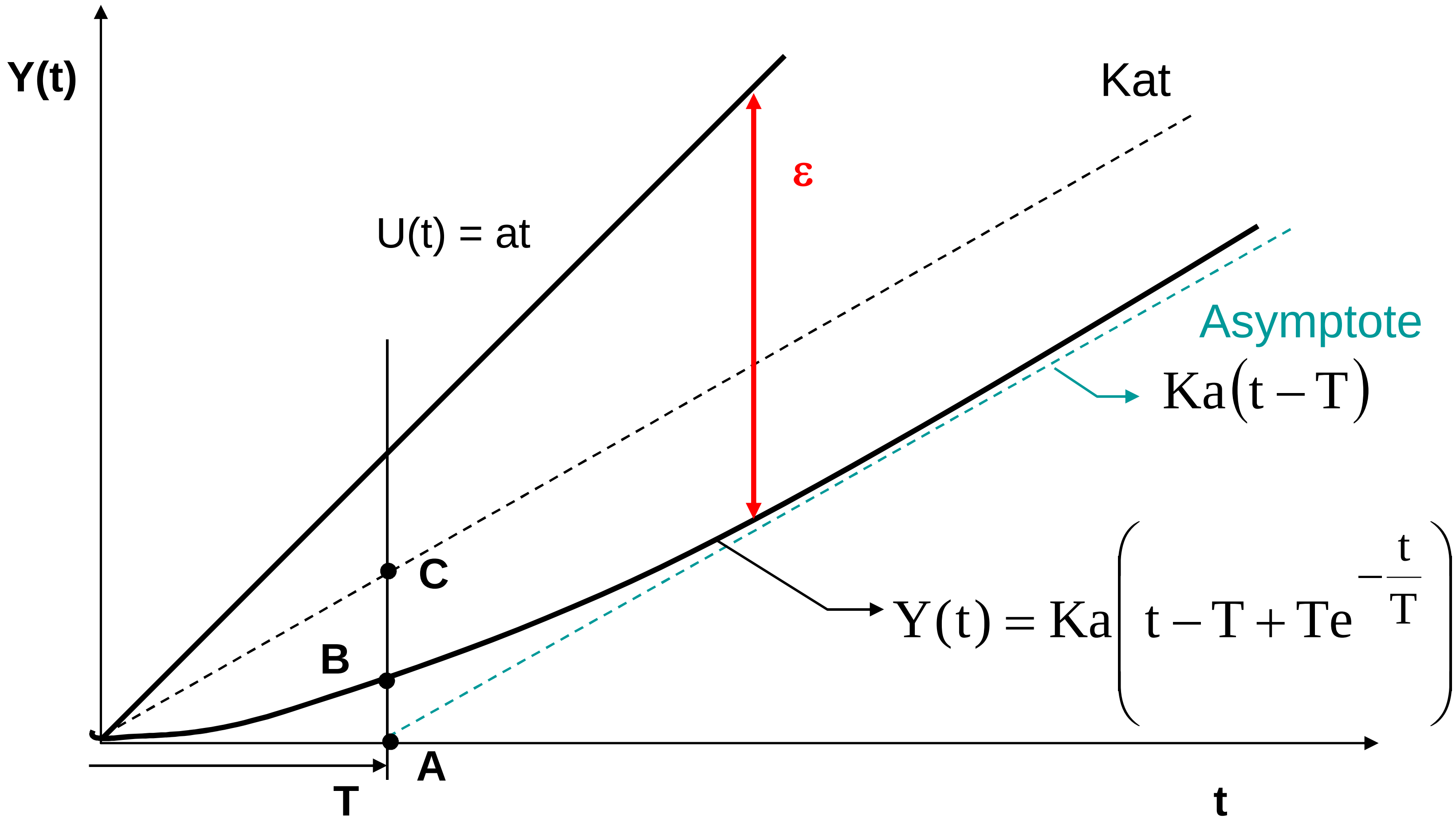
La réponse à une rampe, encore appelée échelon de vitesse, est la réponse y(t) d'un système ou procédé lorsqu'on applique à son entrée une rampe U(t) = a.t dont la transformée de Laplace est a/s^2.

4.1- Système du premier ordre

$$Y(s) = \frac{K}{(1+Ts)} U(s) = \frac{K}{(1+Ts)} \frac{a}{s^2} = Ka \left[\frac{a}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{1+Ts} \right]$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ka \left(t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Pour un gain statique K inférieur à 1 :



L’erreur de poursuite ou de trainage est :

$$\varepsilon = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(U(t) - Y(t)\right) = \lim_{t \longrightarrow \infty} at(1-K) + KaT$$

$+\infty$	si $K < 1$
$-\infty$	si $K > 1$
aT	si $K = 1$

4.2- Système du second ordre

$$Y(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega_o}s + 1}\frac{a}{s^2} = Ka\left[\frac{1}{s^2} - \frac{\frac{2\xi}{\omega_o}}{s} + \frac{\frac{2\xi}{\omega_o^3}s + \frac{4\xi^2 - 1}{\omega_o^2}}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega_o}s + 1}\right]$$

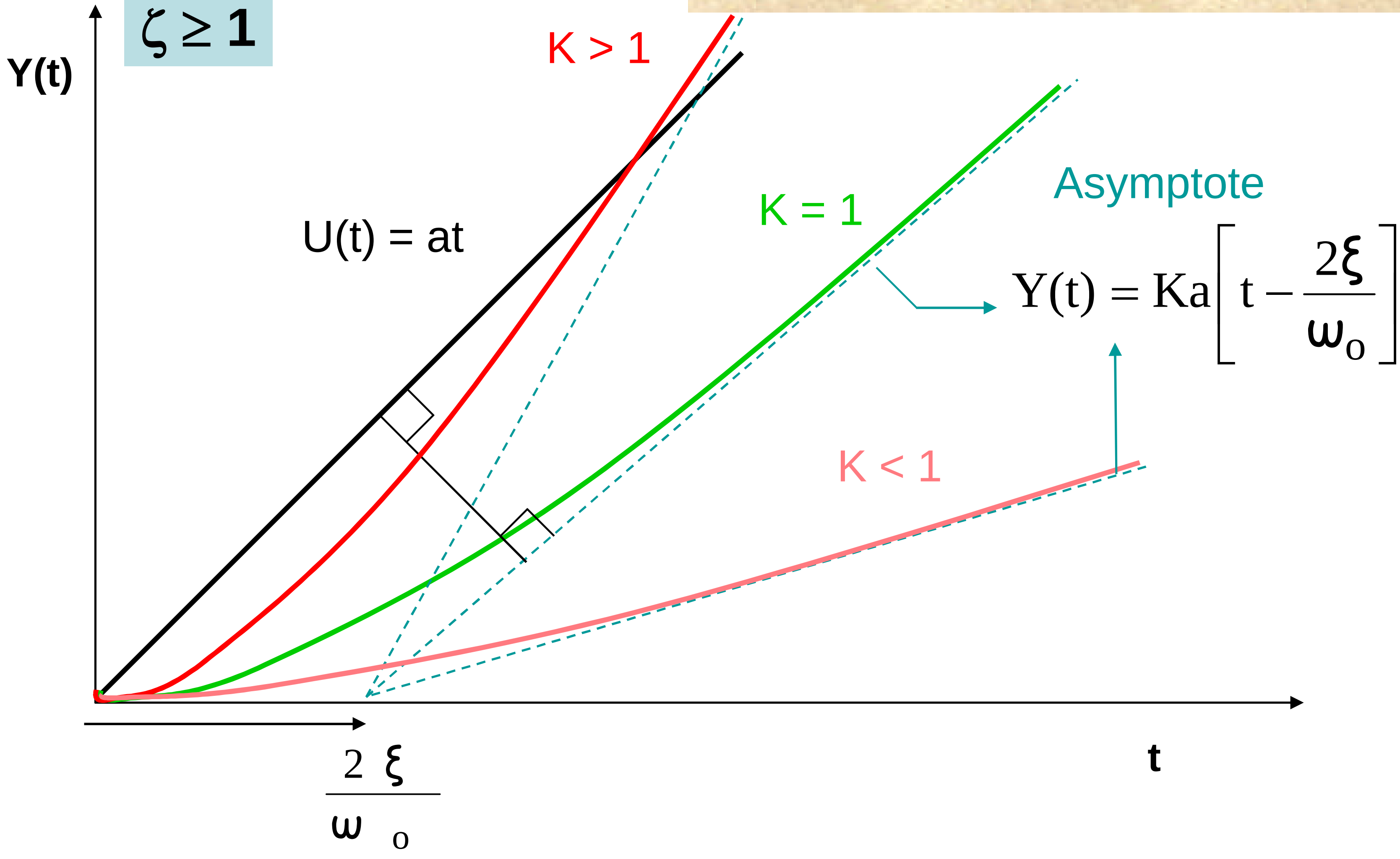
$$Y(s) = Ka\left[\frac{1}{s^2} - \frac{\frac{2\xi}{\omega_o}}{s} + G(s)\right]$$

$$Y(t) = Ka\left[t - \frac{2\xi}{\omega_o} + g(t)\right]$$

Régime apériodique : sans dépassement

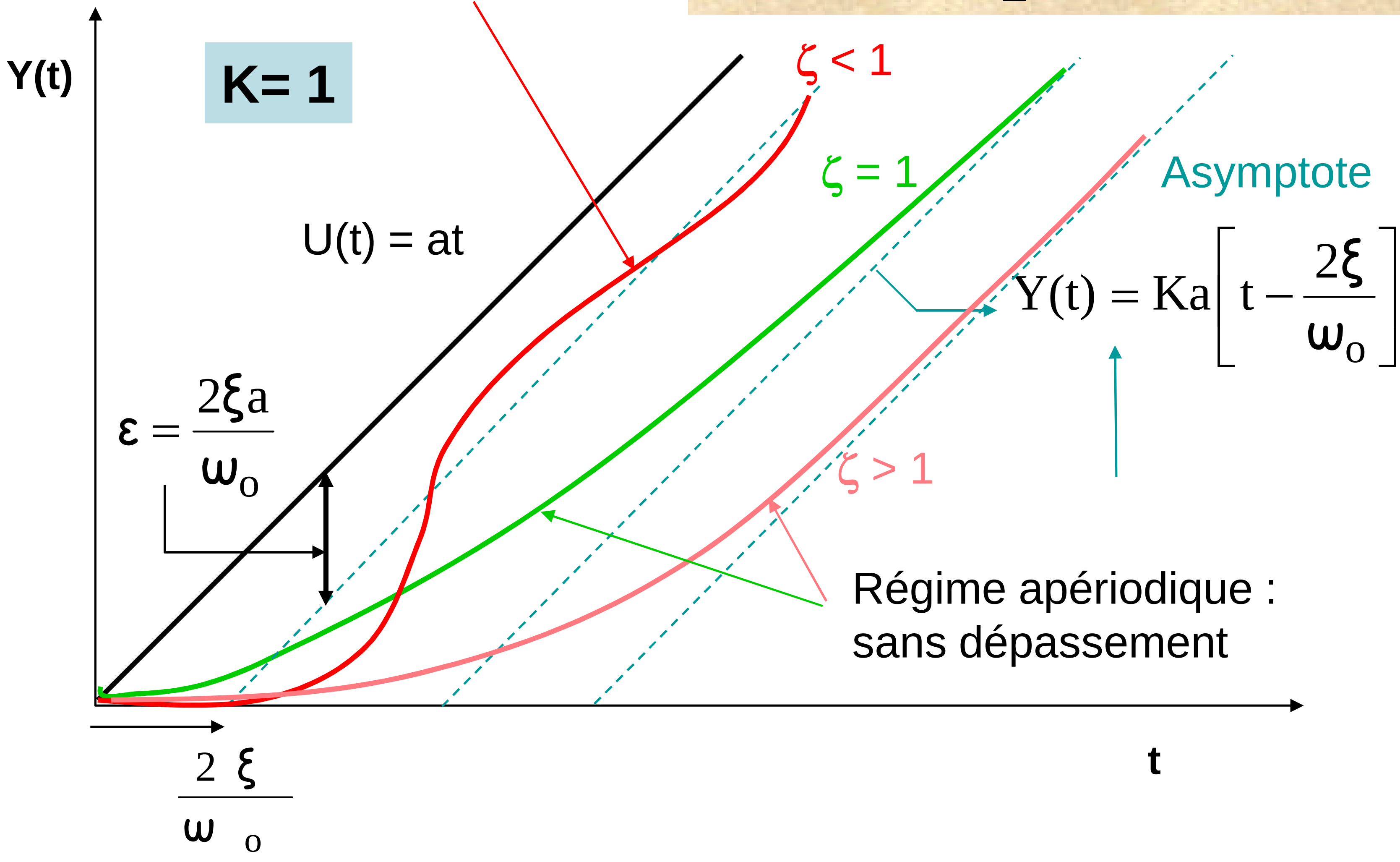
$\zeta \geq \mathbf{1}$

$$Y(t) = Ka\left[t - \frac{2\xi}{\omega_o} + g(t)\right]$$



$$Y(t) = Ka\left[t - \frac{2\xi}{\omega_o} + g(t)\right]$$

Régime oscillatoire :
avec dépassement



5. Réponses harmoniques ou fréquentielles

La variation du signal d'entrée appliqué au système est sinusoïdale : $U(t) = U_o \sin(\omega t)$

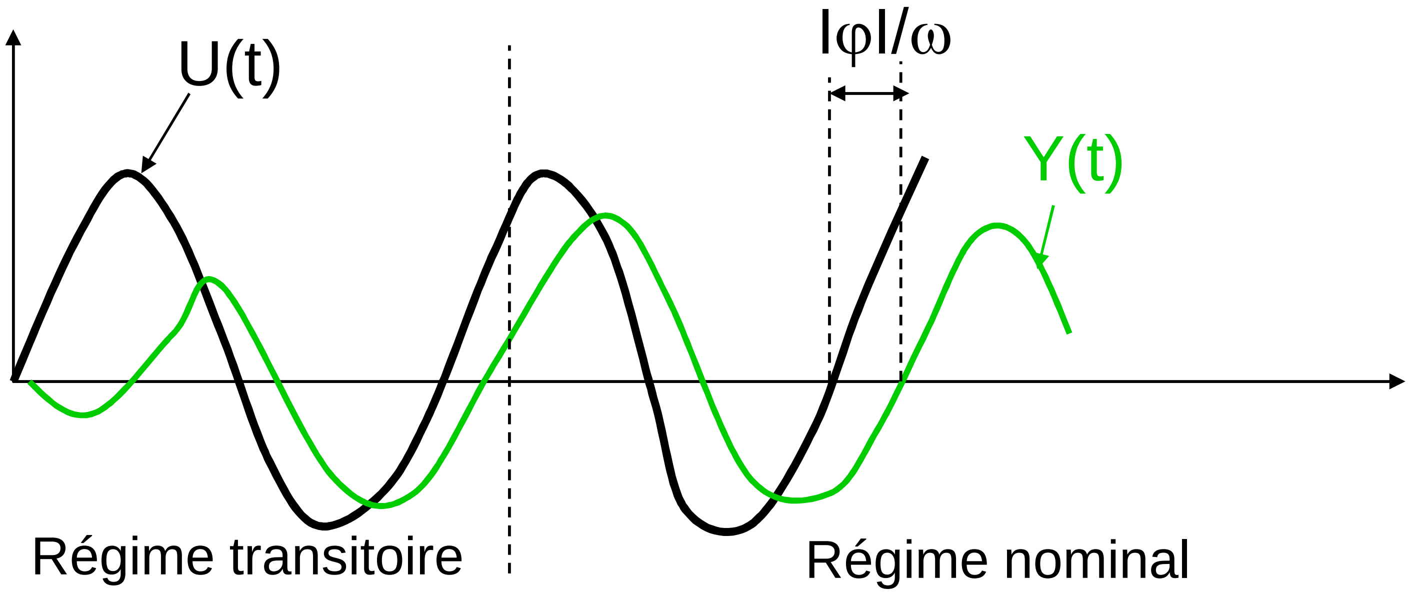
Lorsque le régime permanent est atteint, on relève la variation de signal de sortie : $Y(t) = Y_o \sin(\omega t + \varphi)$

Ce type du signal d'entrée est utilisé surtout en électronique . Méthode qu'on ne peut pas employer pour les procédés industriels. En effet, il est difficilement concevable de commander par un signal sinusoïdal un four de traitement thermique de plusieurs tonnes. Par contre, cette étude sera nécessaire pour l'étude de la stabilité des systèmes régulés.

Variation du signal d'entrée : $U(t) = U_o \sin(\omega t)$

Variation du signal de sortie : $Y(t) = Y_o \sin(\omega t + \varphi)$

En électronique, il est intéressant d'observer le signal de sortie en faisant varier la pulsation ω du signal d'entrée. Ce qui permet de déduire les caractéristiques fréquentielles du système (filtrage, amplification,…).φ est le déphasage.



Pour déterminer Y_o et φ on écrit :

$$U_c(t) = U_o e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad Y_c(t) = Y_o e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Donc :

$$U(t) = \mathrm{Im}(U_c(t)) \quad ; \quad Y(t) = \mathrm{Im}(Y_c(t))$$

Or l'équation différentielle d'un **SLTI** monovariable autour du régime nominal s'écrit (voir chapitre 2) :

$$a_0 Y(t) + a_1 \frac{dY(t)}{dt} + \ldots\ldots + a_n \frac{d^n Y(t)}{dt^n} = b_0 U(t) + b_1 \frac{dU(t)}{dt} + \ldots\ldots + b_m \frac{d^m U(t)}{dt^m}$$

On remplace par $U_c(t)$ et $Y_c(t)$ on obtient :

$$a_0 Y_c(t) + a_1 j\omega Y_c(t) + ... + a_n (j\omega)^n Y_c(t) = b_0 U_c(t) + b_1 j\omega U_c(t) + ... + b_m (j\omega)^m U_c(t)$$

Soit :

$$\frac{Y_c(t)}{U_c(t)} = \frac{b_0 + b_1 j\omega + ... + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega + ... + a_n (j\omega)^n} = \frac{Y_o}{U_o} e^{j\varphi} = H(j\omega)$$

Et finalement :

$$Y_o = U_o \left| H(j\omega) \right| \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{Arg}(H(j\omega))$$

Avec :

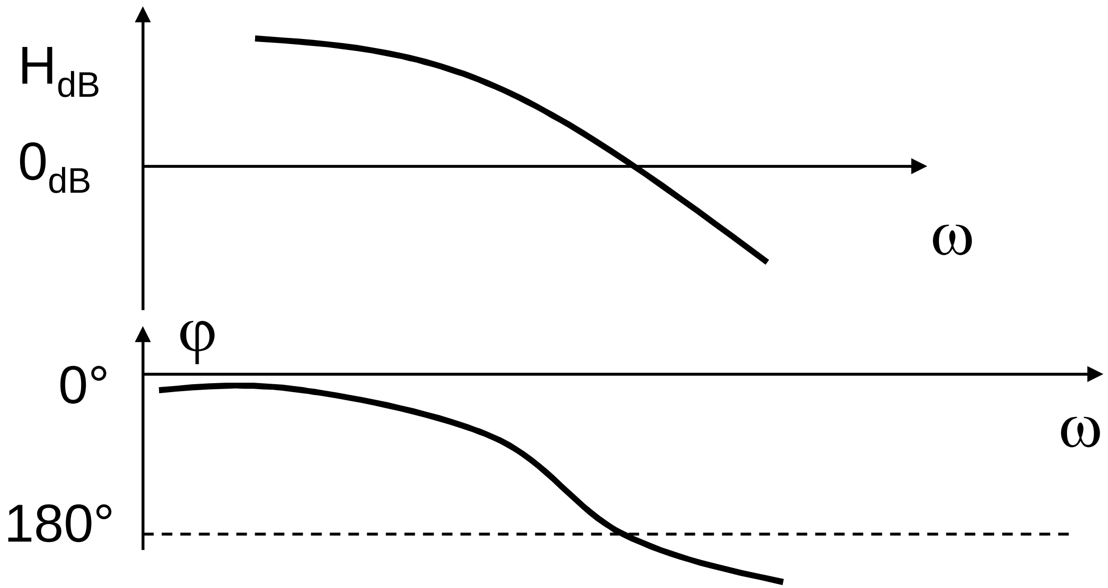
$$Y(t) = Y_o \sin(\omega t + \varphi)$$

Donc en analyse harmonique, il faut donc étudier le module et l'argument de H(s) pour s= $j\omega$. Pour cela on utilise soit deux diagrammes de Bode, soit un diagramme de Nyquist, soit un diagramme de Black

- Diagramme de Bode

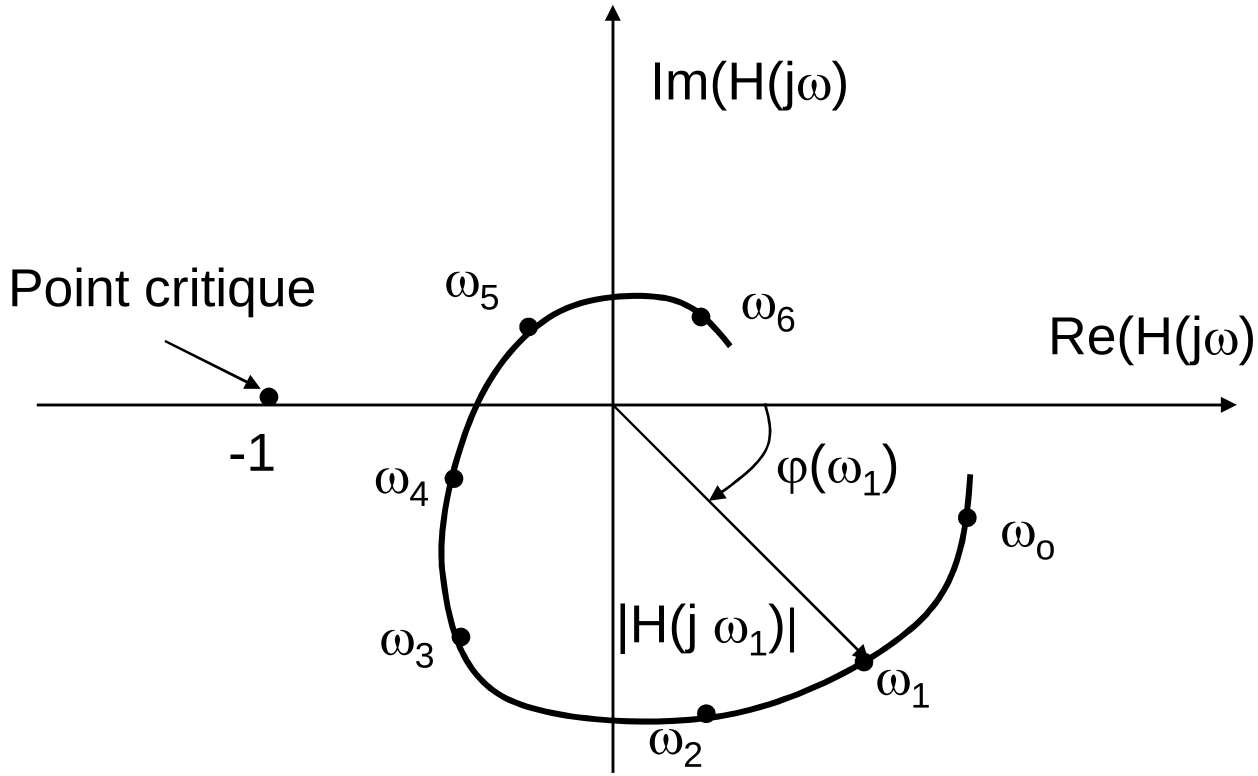
Ce diagramme est constitué de deux courbes : la courbe de gain qui représente le gain H_{dB} en fonction de la pulsation ω et la courbe de phase φ représentant la phase en fonction de la pulsation ω. Les pulsations sont portées sur un axe à graduation logarithmique.

$$\boxed{H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(H(j\omega))}$$



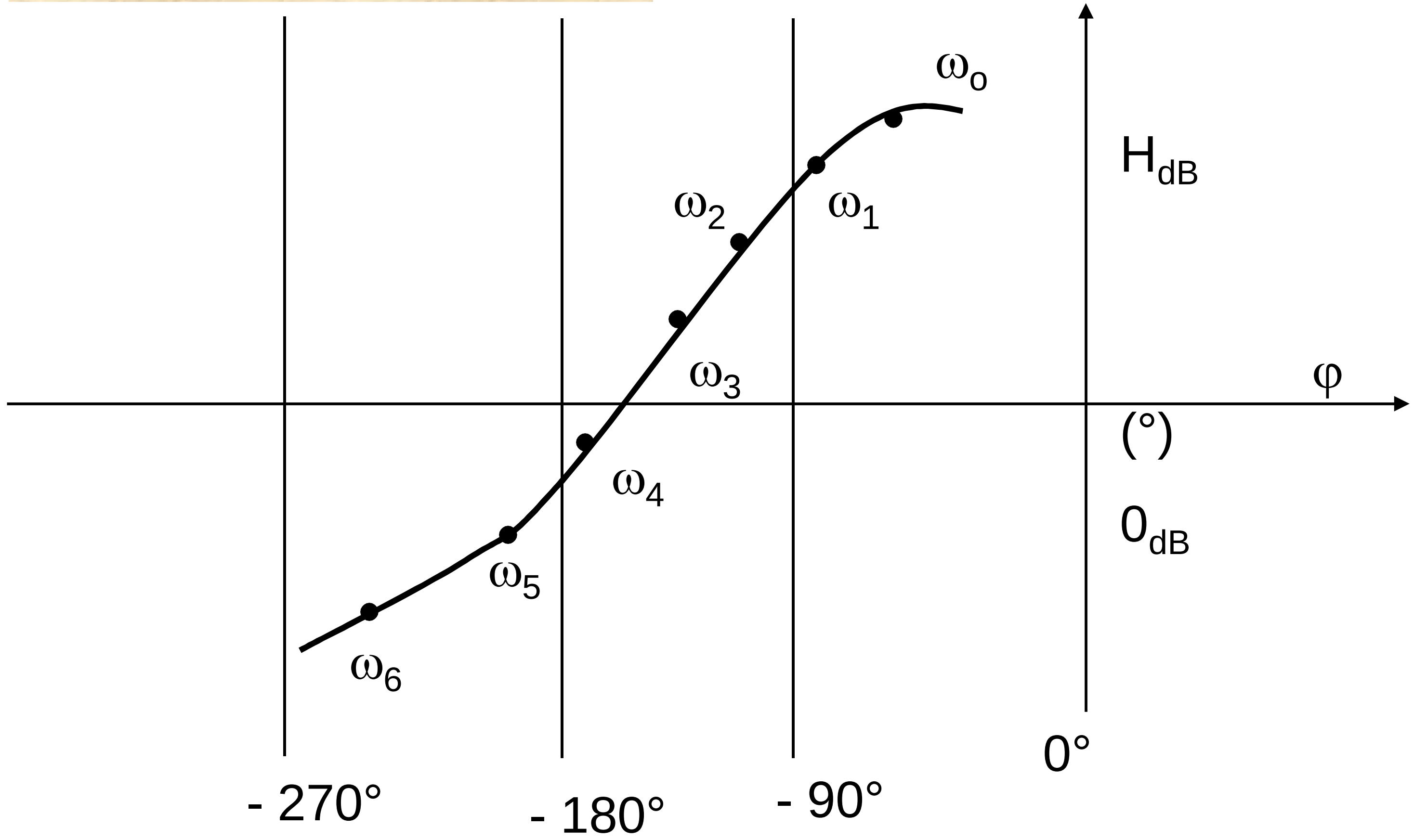
- Diagramme de Nyquist

La courbe de Nyquist,ou lieu de Nyquist, est le lieu géométrique des points d'affixes $H(j\omega)$ dans le plan complexe pour toutes les pulsations ω positives.



- Diagramme de Black

C'est la représentation de Bode mais dans un seul plan. En abscisse, on porte $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(H(j\omega))$ en degrés et en ordonnées $H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$ en décibel (dB).



5.1- Système intégrateur

$$\begin{cases} H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{s} \\ H(j\omega) = \dfrac{K}{j\omega} = -j\dfrac{K}{\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{K}{\omega} \Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = 20\log\dfrac{K}{\omega} = -20\log\omega + 20\log(K) \\ Arg(H(j\omega)) = -90° \end{cases}$$

$$\omega = 1 \Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = 20\log K$$

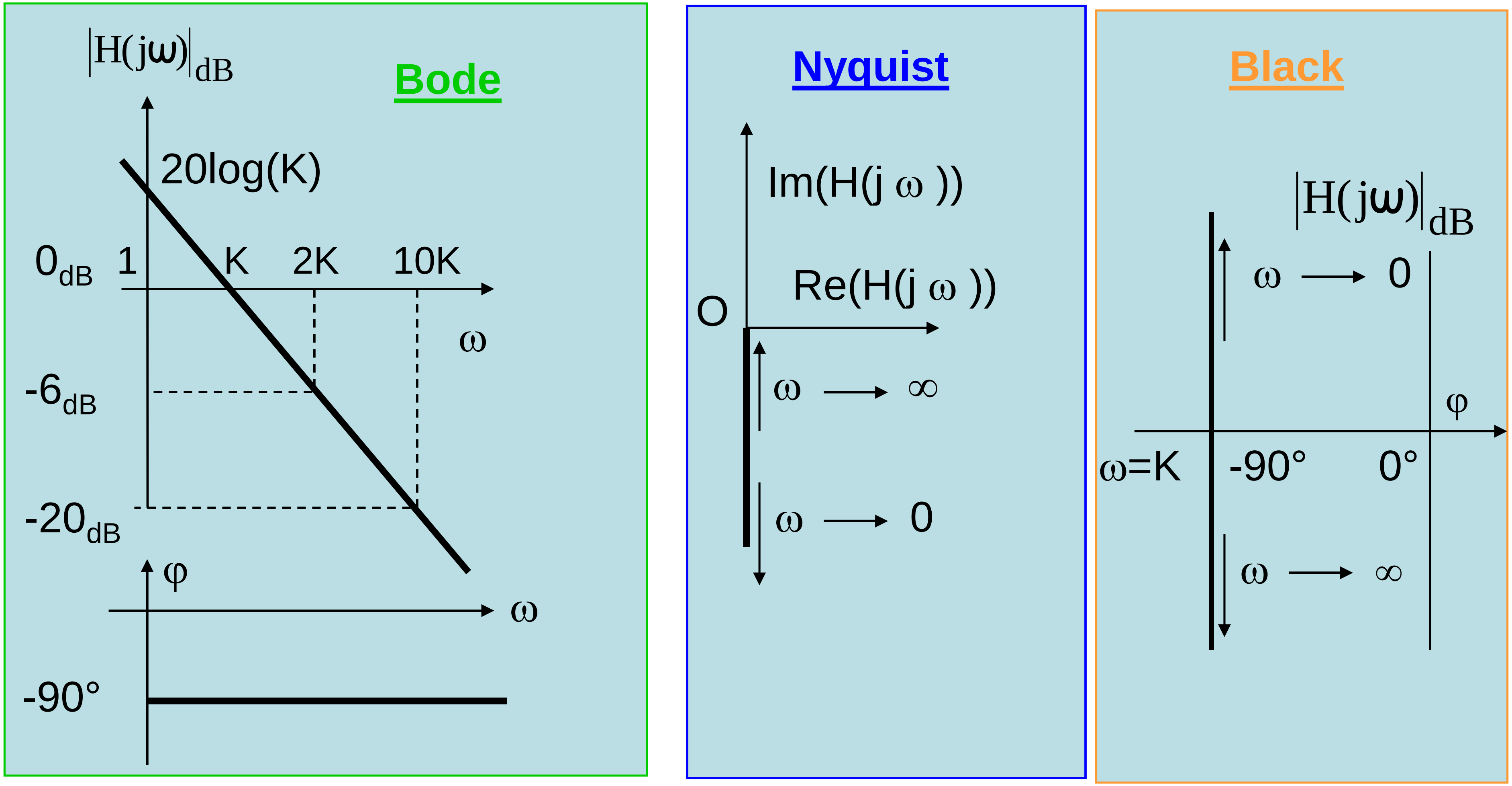
$$\omega = K \Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = 0$$

$$\omega = 2K \Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = -20\log 2 \approx -6\,dB$$

$$\omega = 10K \Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = -20\log 10 = -20\,dB$$

Dans la plan de Bode on trouve une droite de pente -6dB/octave, ou -20dB/décade.

Si on pose X = 20log(ω) alors la droite est de type Y = -X+C d'où l'appellation « pente -1). Pour K> 0 on obtient le tracé :



5.2- Système du premier ordre

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + Tj\omega} = \frac{K(1 - Tj\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \frac{K\left(1 - j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = K\frac{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad (-K \quad \text{si } K < 0)$$

$\omega_c = \dfrac{1}{T}$ est une pulsation remarquable appelée pulsation de coupure .

Diagrame de Bode

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 10\log(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2) \xrightarrow{\omega\to 0} 20\log K$$

1ère asymptote

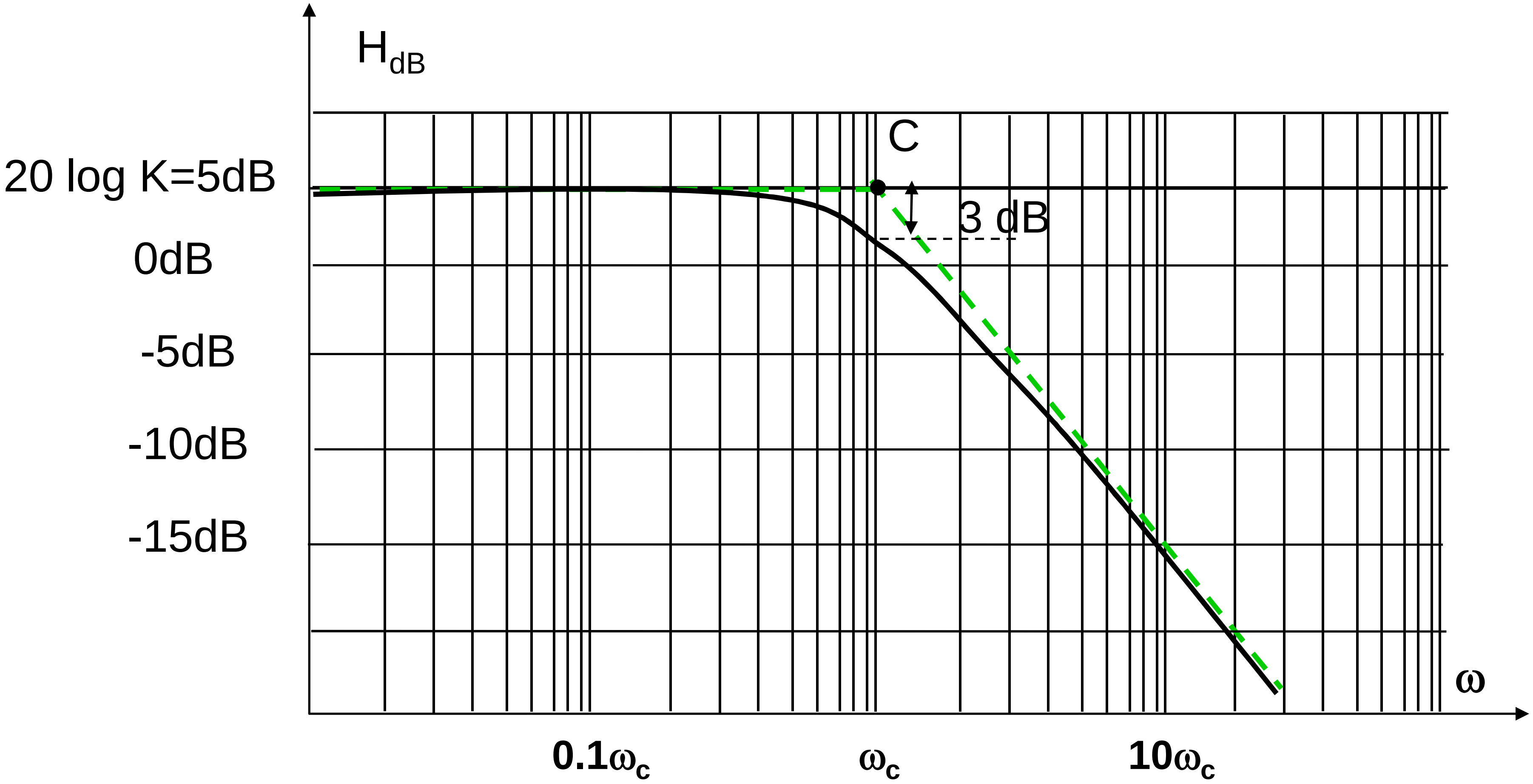
$$|H(j\omega)|_{dB} \xrightarrow{\omega\to\infty} 20\log K - 10\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$$

$$= -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) + 20\log(K) = -20\log\omega + 20\log(K\omega_c)$$

2ème asymptote

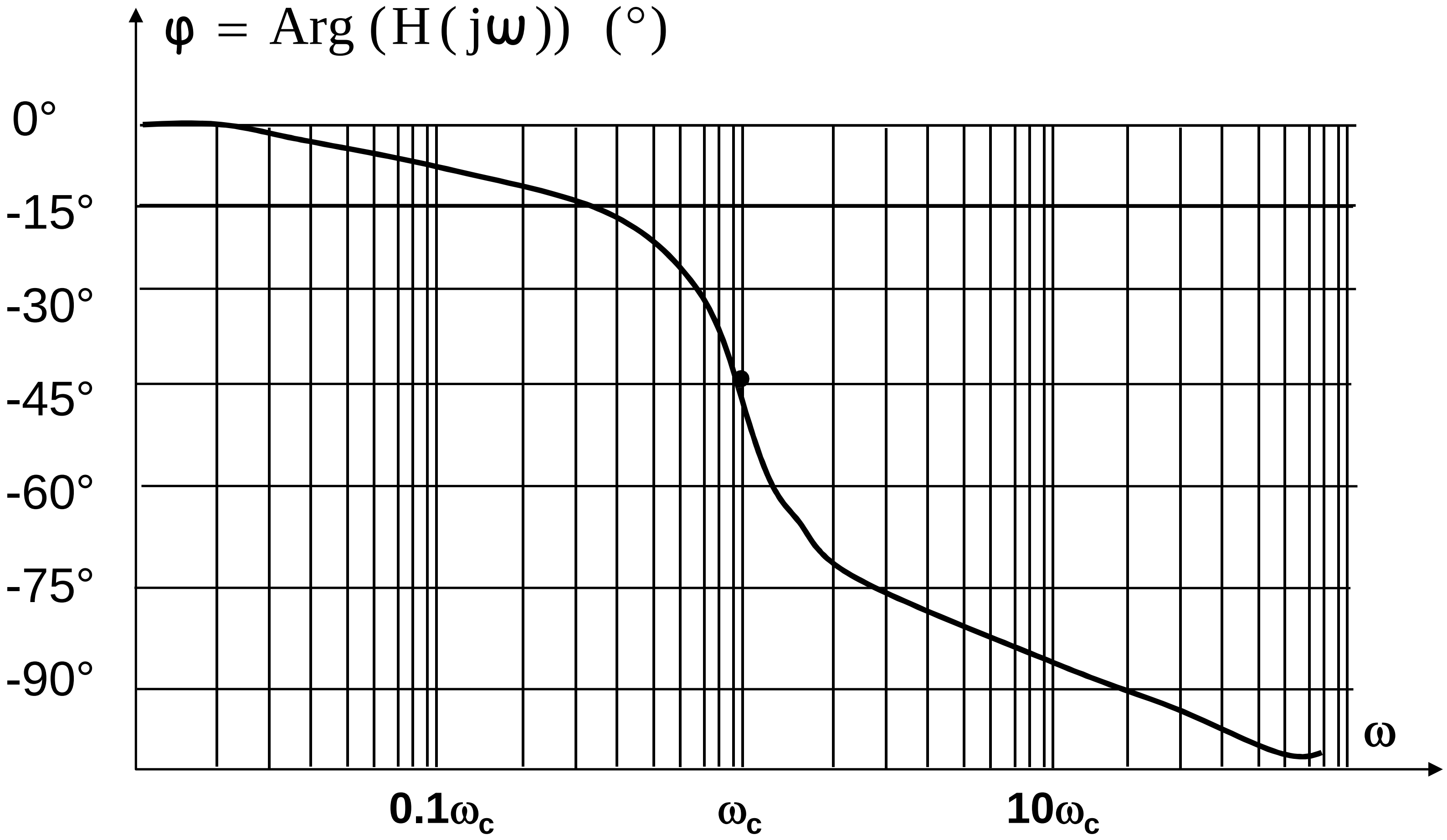
$$\varphi = \mathrm{Arg}(H(j\,\omega)) = \mathrm{Arg}\,(K) + \mathrm{Arg}(1 - j\frac{\omega}{\omega_c})$$

$$= \begin{cases} -\,\mathrm{Arctan}(\dfrac{\omega}{\omega_c}) & \text{si } K \succ 0 \\ \pi - \mathrm{Arc\,tan}\,(\dfrac{\omega}{\omega_c}) & \text{si } K \prec 0 \end{cases}$$



Courbe de gain d'un premier ordre pour K=1.778

Exemple   K=1.778



Courbe de phase d'un premier ordre

Diagramme de Nyquist

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+Tj\omega} = \frac{K(1-Tj\omega)}{1+T^2\omega^2} = \frac{K(1-j\frac{\omega}{\omega_c})}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

$$= \frac{K}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} - \frac{jK\frac{\omega}{\omega_c})}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = A + jB$$

(On suppose K> 0 pour les tracés) . On remarque alors :

$$A^2 + B^2 = KA$$

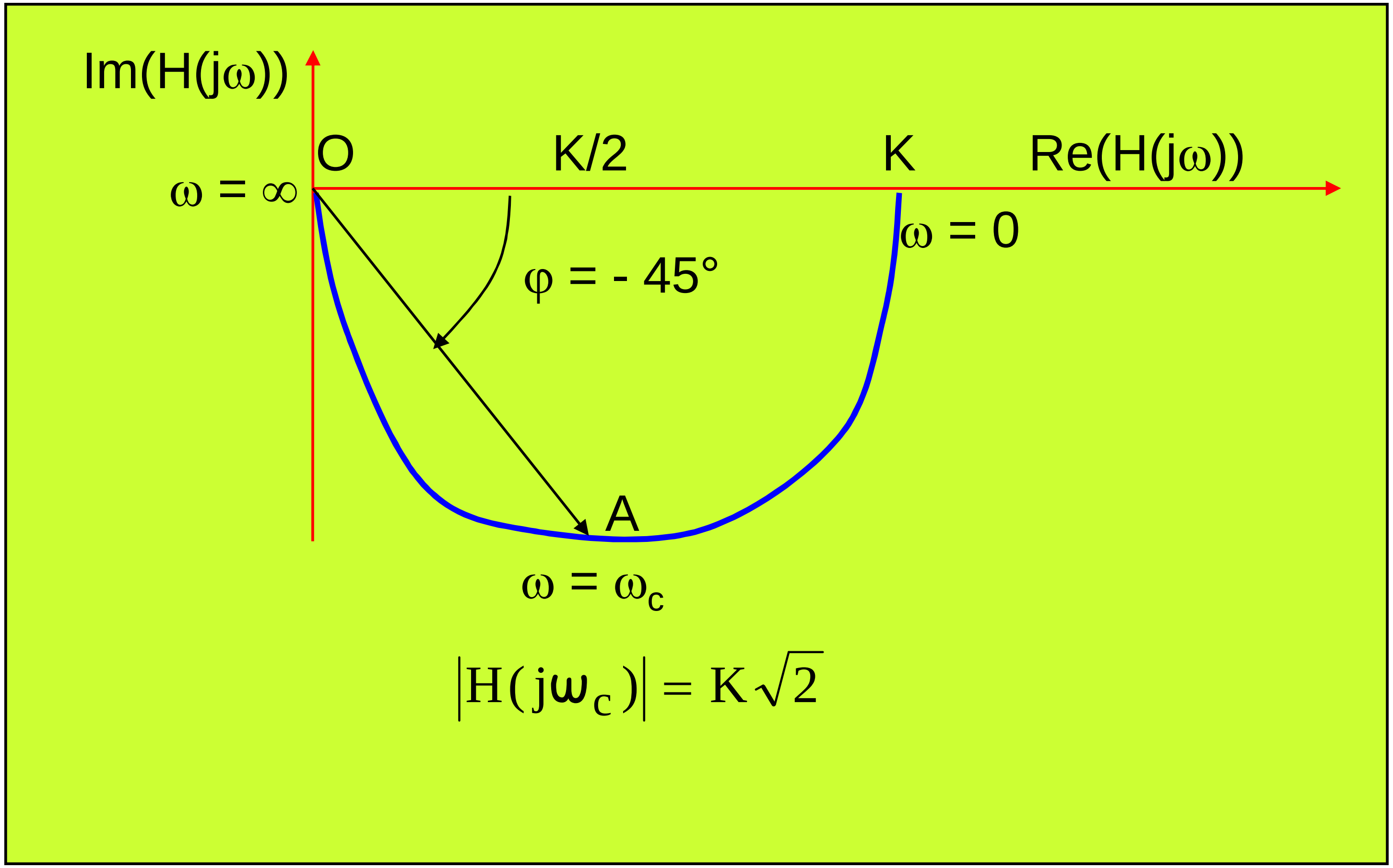
Soit :

$$(A - \frac{K}{2})^2 + B^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

$$\left(A - \frac{K}{2}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

Equation d'un cercle de centre (K/2,0) est de rayon K/2

D'où le diagramme de Nyquist :



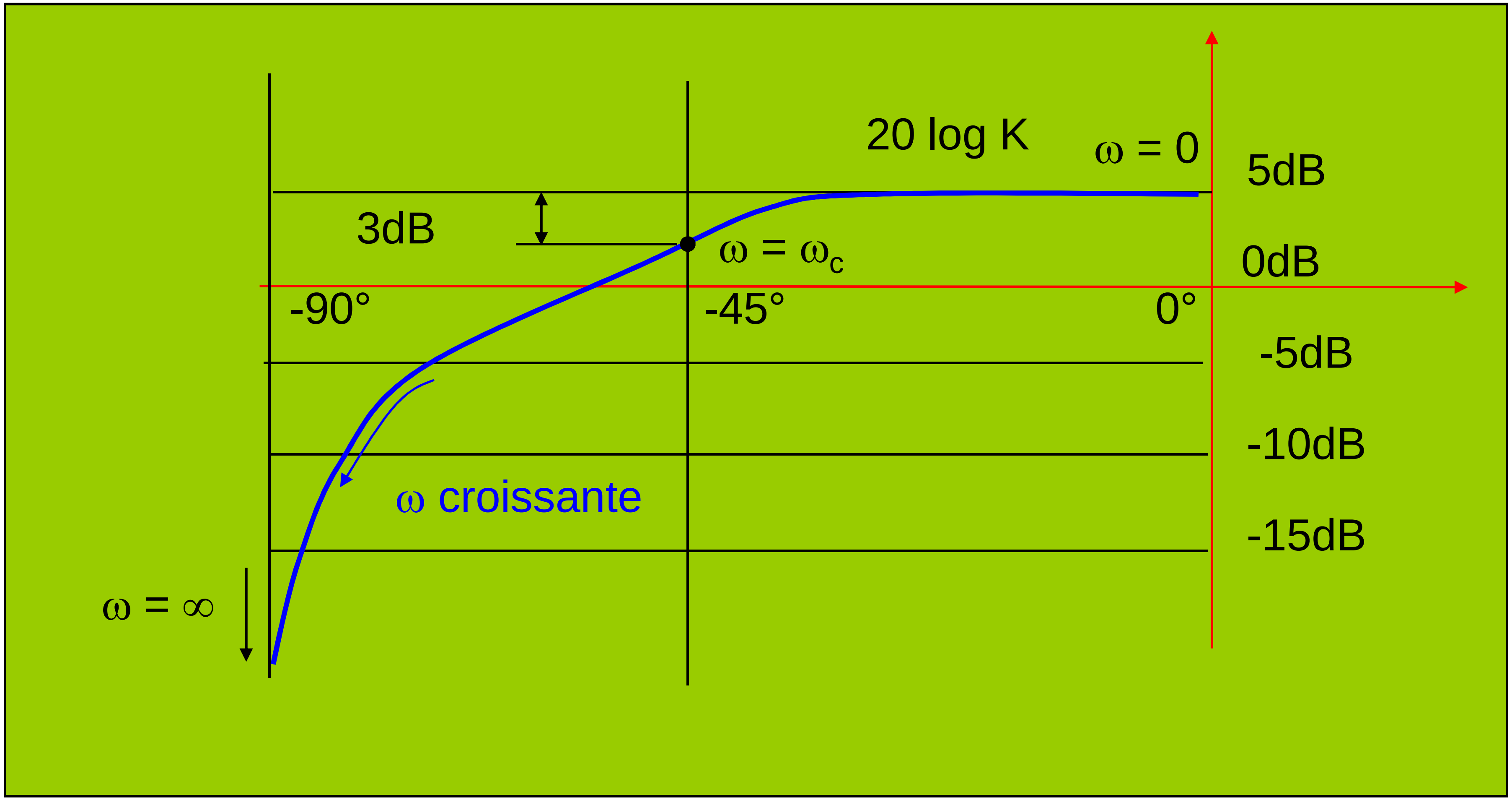


Diagramme de Black d'un premier ordre pour K=1.778

5.3- Système du second ordre