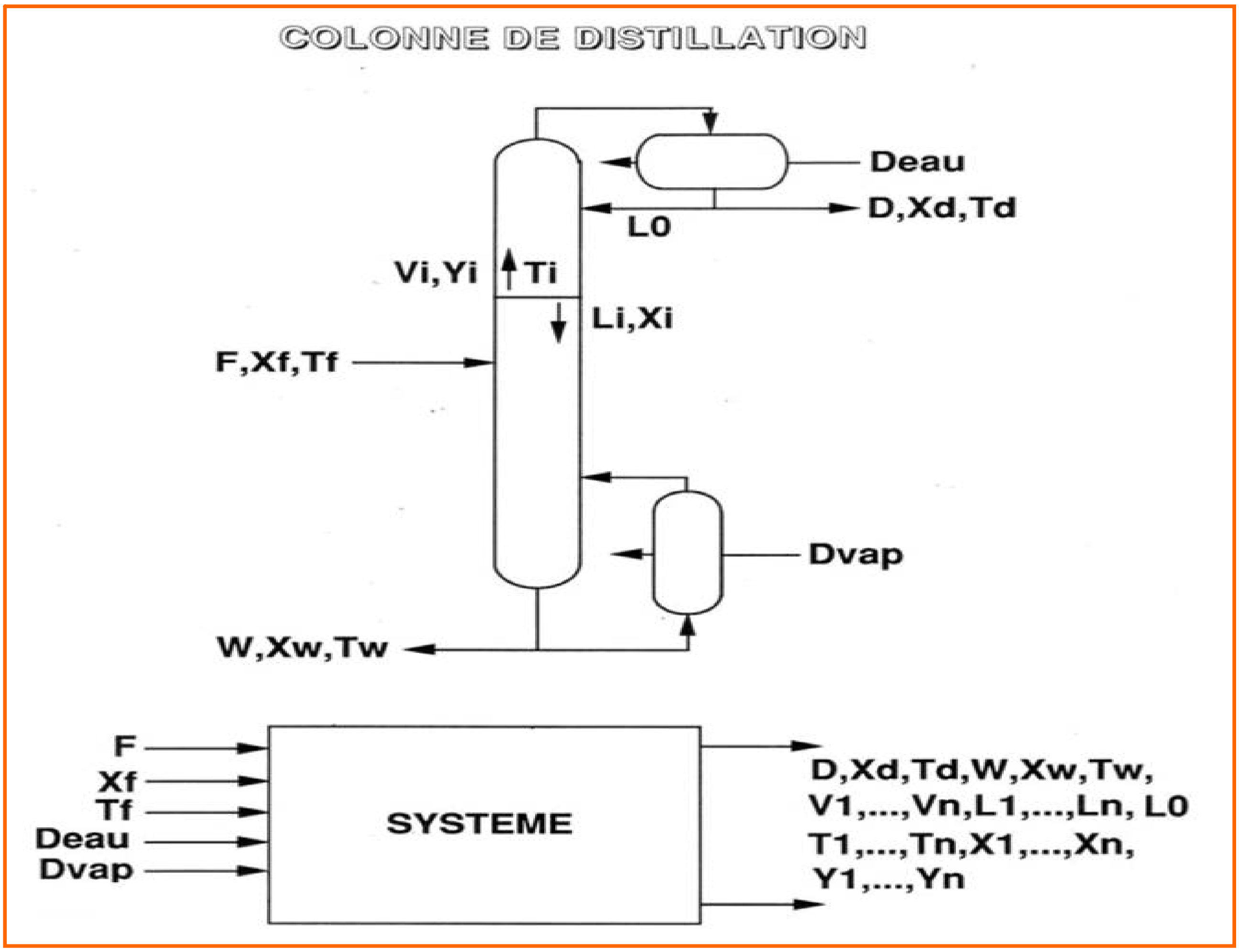
Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Supérieure de Technologie
Filière Génie thermique et Energétique
Deuxième année
Route d'Immouzer Bp 2427
Fès -Maroc

Corrigés des travaux dirigés de régulation industrielle analogique

Enseignant : Dr.Ing. M. Rabi

Exercice sur le schéma bloc d'un procédé



Dr.Ing.Mohammed Rabi

Exercice 3 : Identification en BO d'un second ordre : débit d'air d'un incinérateur

1. Ce procédé est naturellement stable car à une entrée bornée U(t) =Δu correspond une sortie bornée Δy (Figure 3.1). Le procédé est oscillant et amorti.

2. On observe un temps mort de Y par rapport à U et une oscillation amortie c'est donc $H_2(s)$ qui est retenue. En effet, $H_1(s)$ ne contient pas de temps mort ou retard. $H_3(s)$ comporte des pôles réels ou $\zeta > 1 \Rightarrow$ le procédé ne peut effectuer des oscillations amorties. En fin, $H_4(s)$ donnerait une réponse indicielle avec une tangente à l'origine négative (procédé à réponse inverse), ce qui ne correspond pas à un temps mort.

3. Détermination des paramètres.

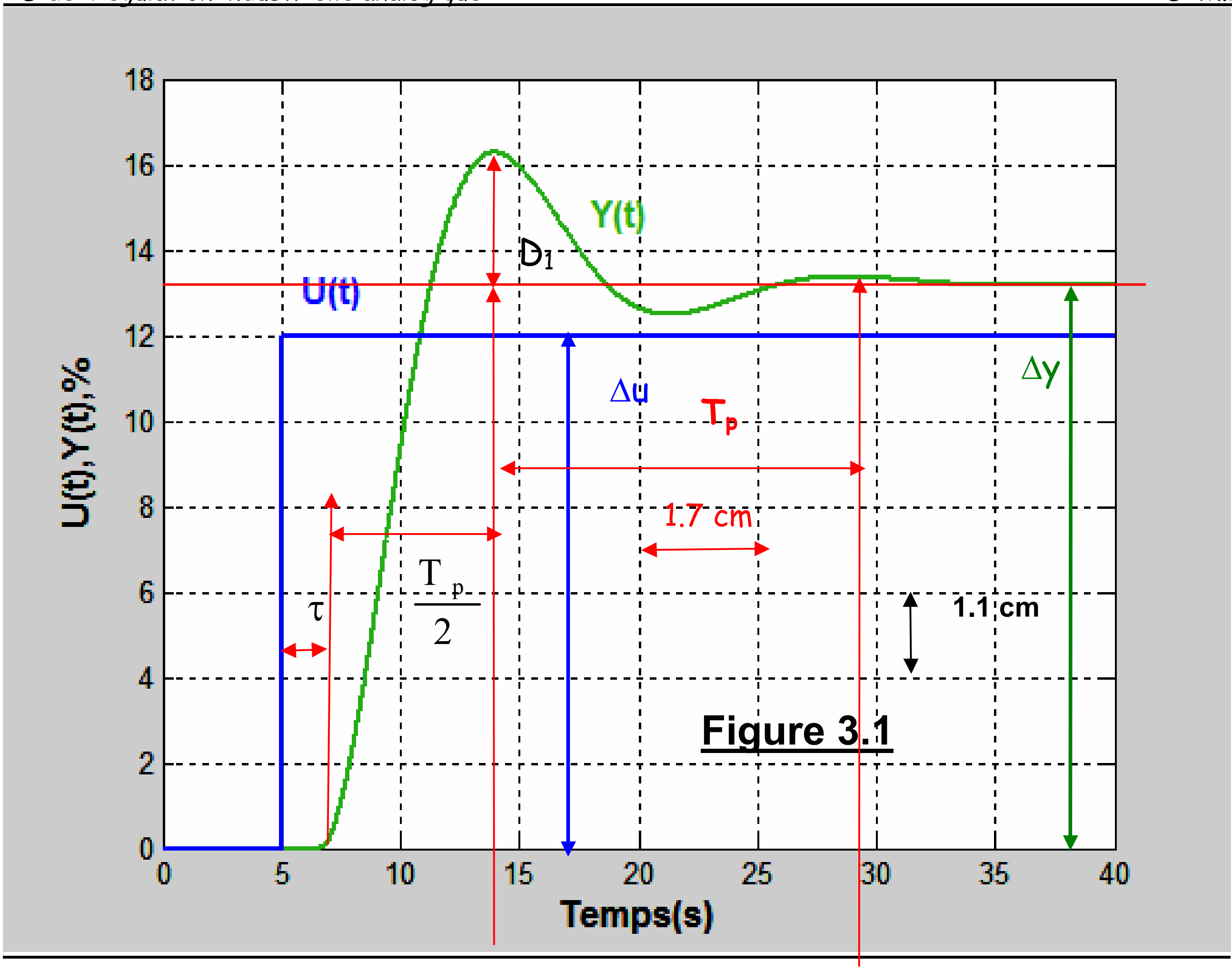
$$H_2(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0{}^2}}$$

$\Delta y \approx 13.1\%$; $\Delta u = 12\%$ $\Rightarrow$ K=13.1/12≈1.1

$$D_1 = K.\Delta u.e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}} = \Delta y.e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}} \text{ ou bien } \mathrm{D}_1(\%) = 100.e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}}$$

$$avec \quad \mathrm{D}_1(\%) = \frac{\mathrm{D}_1}{\Delta y} \times 100 \approx 23.61\% \quad \left[\frac{1.7\ (\mathrm{cm})}{7.2\ (\mathrm{cm})} \times 100 \right]$$

$$Donc \text{ on en déduit } \zeta = \sqrt{\frac{(Log(D_1(\%)/100))^2}{\pi 2 + (Log(D_1(\%)/100))^2}} \approx 0.42$$

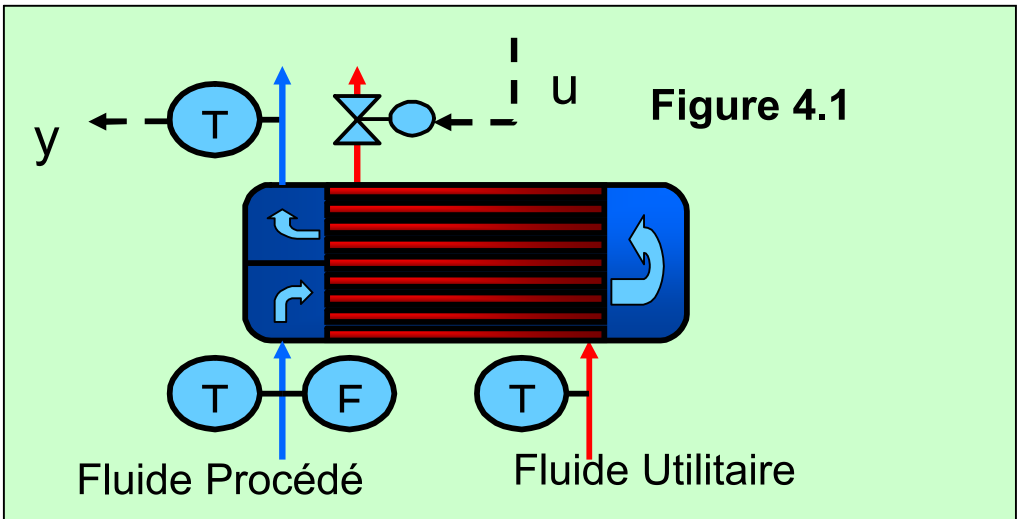


$T_p = (5.2/1.7) * 5 = 15.29s$; $\tau = (0.5/1.7) * 5 \approx 1.47\, s$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}} = 0.453\, rd/s$$

$$\Rightarrow H_2(s) = \frac{1.1e^{-1.47.s}}{1+1.85s+4.88s^2}$$

Exercice 4 : Identification d'un procédé stable en BO



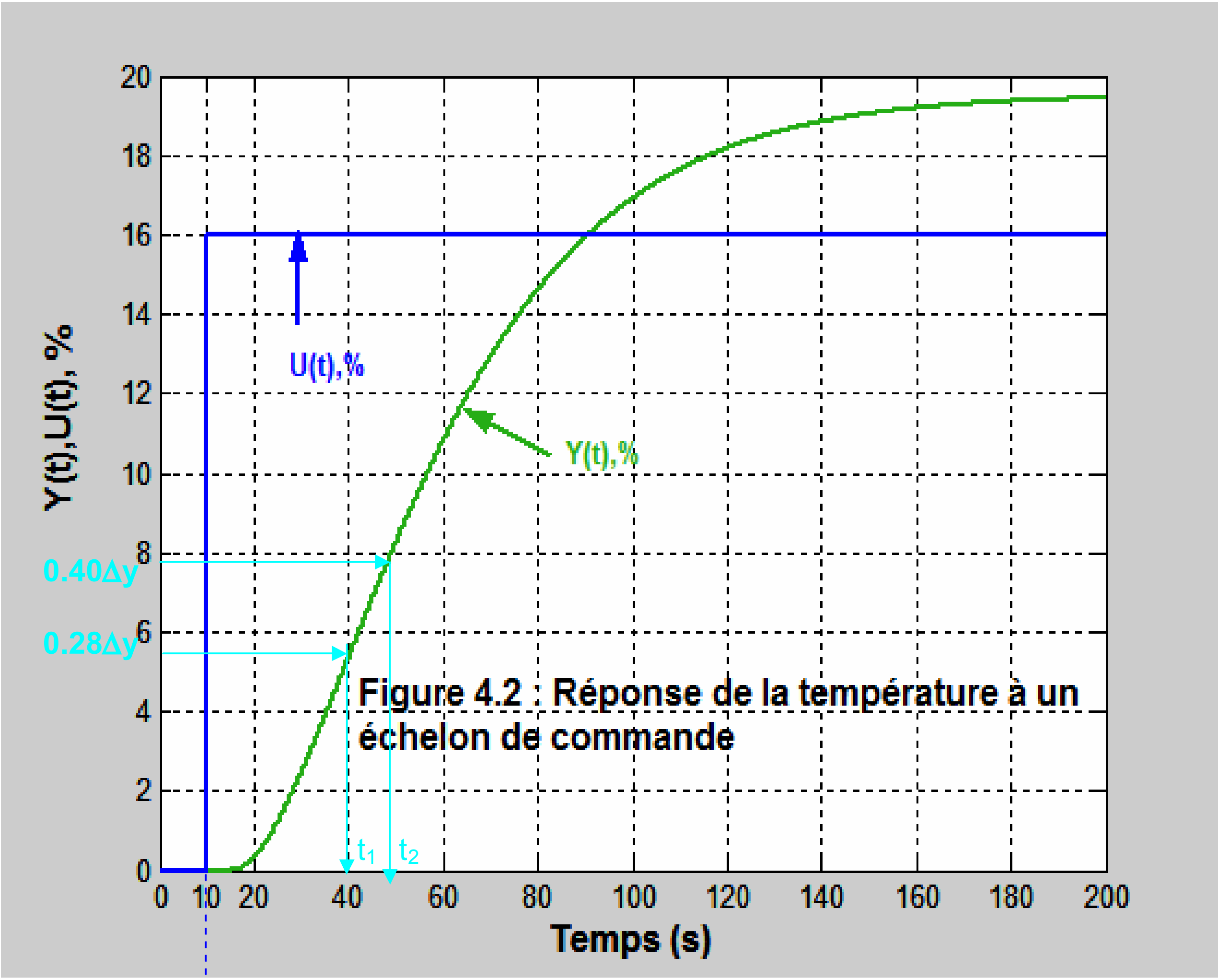


Figure 4.2 : Réponse de la température à un échelon de commande

$\Delta y \approx 19.60\%$; $K = \Delta y / \Delta u \approx 1.23$;

$0.28\Delta y = 0.28 \times 19.60 \approx 5.50\%$; $0.40\Delta y = 0.40 \times 19.60 \approx 7.84\%$

$t1 \approx 30s$; $t_2 \approx 38.33s$

$$T = 5.5 \times (t_2 - t_1) = 45.82s$$

$$\tau = 2.8 \times t_1 - 1.8 \times t_2 = 15s$$

Donc la méthode de Broïda donne : $H(s) = \dfrac{1.23\, e^{-15s}}{(1 + 45.82 s)}$

Exercice 6: Identification d'un procédé en BF : dégazeur thermique

La Fonction de transfert réglante de niveau d'eau d'un dégazeur thermique à été identifiée en boucle fermée selon la méthode de pompage vue au chapitre 4 du cours. Lorsque le procédé est mis en oscillations juste entretenues, on note $K_{RC} = 5$ et $T_{osc} = 23.88$ min.

Fonction transfert réglante : $$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s\,(Ts+1)^2} \text{(sans dimension)}$$

$$FTBO(s) = H_R(s).H(s) = \frac{K_R.k}{s\,(Ts+1)^2} \Rightarrow FTBO(j\omega) = \frac{K_R.k}{j\omega\,(Tj\omega+1)^2}$$

Oscillations entretenues :

$$\begin{cases} |FTBO(j\omega = \omega_\pi)| = 1 \\ K_R = K_{RC} \\ Arg(FTBO(j\omega = \omega_\pi) = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{K_{RC}.k}{\omega_\pi\,((T\omega_\pi)^2+1)} = 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} - 2Artg(T\omega_\pi) = -\pi \end{cases}$$

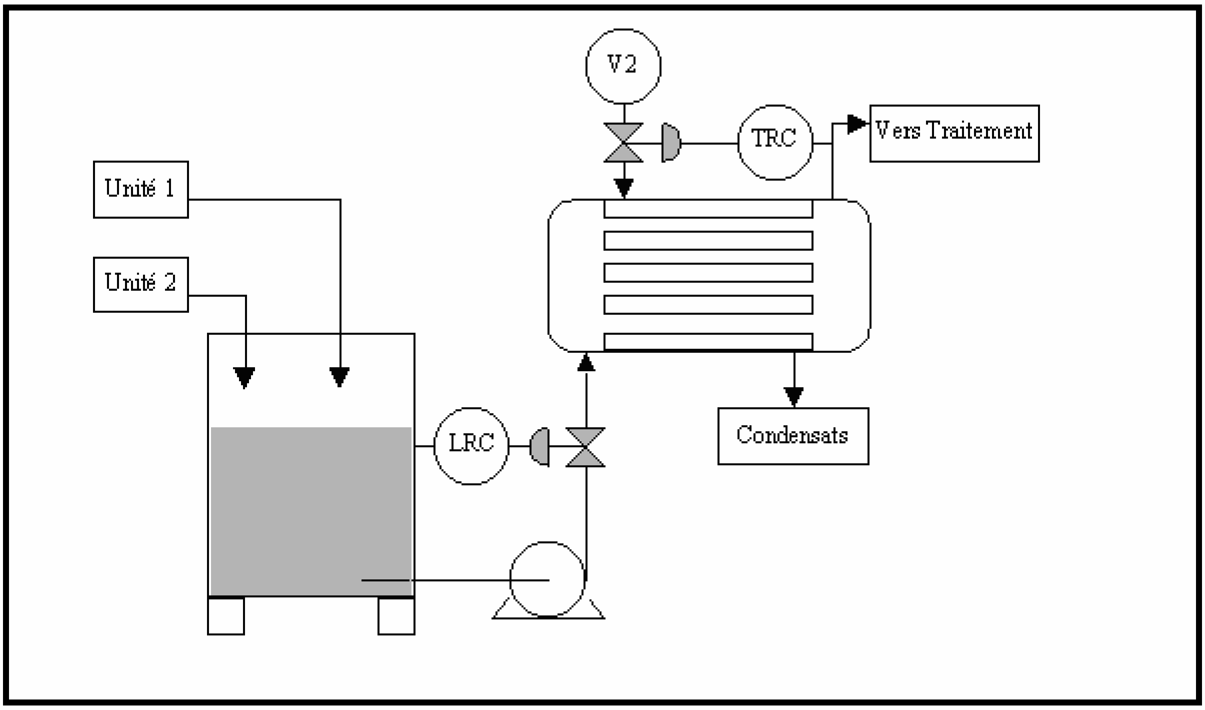
$$\Rightarrow \begin{cases} (T\omega_\pi) = 1 \\ k = \dfrac{\omega_\pi\,((T\omega_\pi)^2+1)}{K_{RC}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{1}{\omega_\pi} = \dfrac{T_{osc}}{2\pi} = 3.8\,\text{min} \\ k = 0.1\,\text{min}^{-1} \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{0.1}{s\,(3.8s+1)^2}$$

TD de Régulation Industrielle N°1

(2013-2014)

Problème 1 :

Soit le procédé suivant :



Le fluide procédé est le résidu de fonctionnement des unités 1 et 2. Le débit nominal est de 500 L/h pour l'unité 1 et de 700 L/h pour l'unité 2 avec des maxima à 1000 L/h pour l'unité 1 et 1400 L/h pour l'unité 2. Le fluide procédé arrive dans une cuve de stockage de 5 mètres de haut, le niveau nominal de cette cuve est de 4 mètres. La cuve étant situé dans un hall, la température nominale du liquide stocké est de 20 °C. Le fluide procédé est repris par une pompe centrifuge et envoyé vers un échangeur de chaleur. Le fluide procédé traverse l'échangeur dans les tubes, tandis que le fluide thermique, de la vapeur d'eau saturante à 2 bar, se condense dans la calandre de l'échangeur de chaleur. Le fluide procédé est ainsi chauffé à une valeur nominale de 75 °C. Il demeure à l'état liquide.

Il ne doit pas être vaporisé. Sa température d'ébullition est de 135 °C, il est potentiellement explosif. Le débit nominal de vapeur d'eau nécessaire pour chauffer le débit nominal de fluide procédé jusqu'à la température de 75 °C est de 750 kg/h, au maximum de 2000 kg/h. Le fluide procédé est ensuite envoyé vers une unité de traitement.

1-Pour chacune des 2 régulations, préciser quelles sont les grandeurs réglées, réglante et perturbantes. Donner la valeur de Consigne de chacune d'elles.

2-Choix des capteurs : le LT est un capteur passif, d'étendue d'échelle 0 à 6 mètres, de signal 4-20 mA, muni d'une sécurité intrinsèque ; le capteur TT est un capteur actif, d'étendue d'échelle 10 à 150 °C, de signal 4-20 mA, muni d'une sécurité ADF.

- Expliquez pourquoi ces capteurs conviennent.

3-Choix des vannes de régulation : la vanne LV est pneumatique, NO, munie d'un positionneur, de débit maximum 3000 L/h, le débit varie linéairement avec la commande ; la vanne TV est pneumatique, NF, munie d'un positionneur, de débit maximum 2000 kg/h, le débit varie linéairement avec la commande.

- Quel est le rôle du positionneur ?
- A-t-on eu raison de choisir une vanne NF pour la TV ?
- Le débit maximum de 3000 L/h de la LV convient-il ?

4-On dispose de 2 régulateurs 4-20 mA sur les canaux de mesure et de correction, les régulateurs sont capables d'alimenter les boucles de mesure, ils sont situés en salle de contrôle, le LC est mixte et le TC est parallèle. On dispose de 2 enregistreurs 2 voies, situés en salle de contrôle, le LR fonctionne en entrée 4-20 mA et le TR fonctionne en entrée 1-5 V, ils sont destinés à enregistrer les variations de la mesure et de la correction sur chaque boucle de régulation. On dispose ensuite de tous les convertisseurs et de tous les types d'alimentations nécessaires.

Effectuer les câblages de chacune des deux boucles de régulation.

5-Application numérique :

5.1- Le LT mesure 1.5 m dans la cuve, quelle est l'intensité transmise au régulateur LC ?

5.2- Le TC reçoit du TT une intensité de 16.3 mA, quelle est la valeur de la température mesurée par le capteur-transmetteur de température ?

5.3- Le LC envoie à la LV une commande u de 65 %, quelle est la pression de commande, l'ouverture de la vanne et le débit qui traverse la LV ?

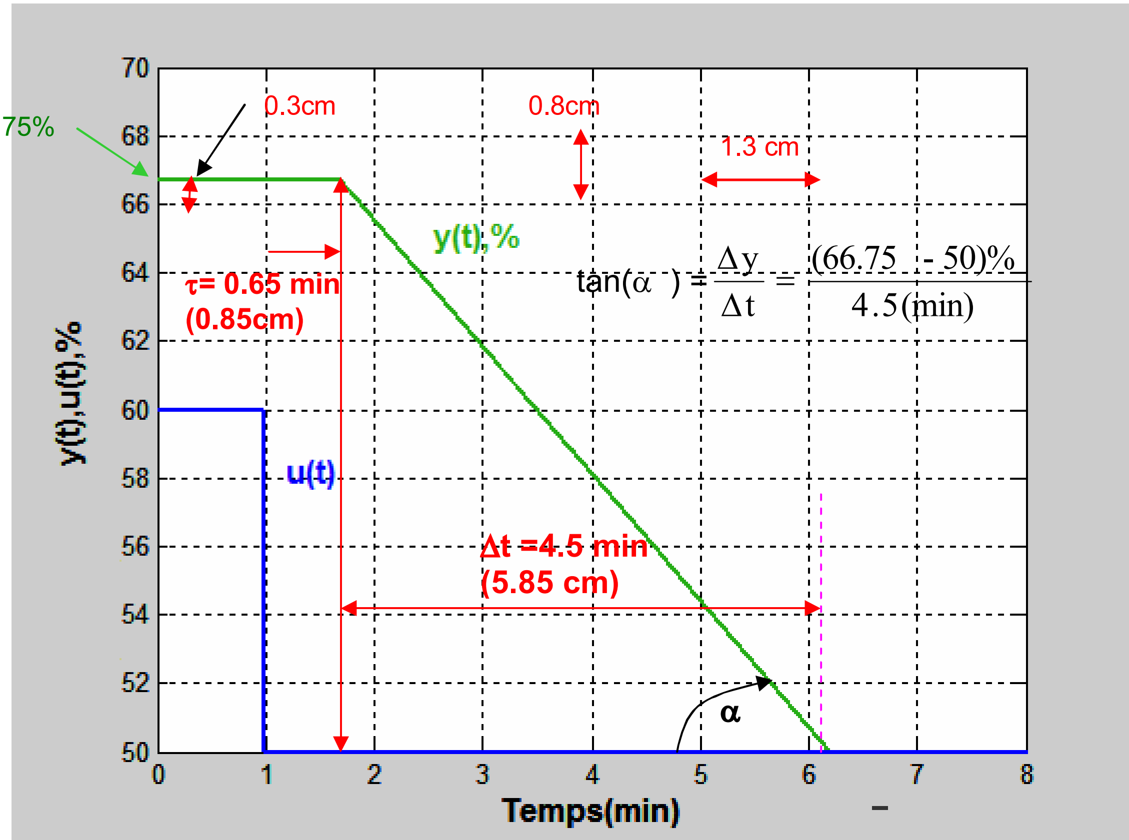
5.4- La TV laisse passer un débit de 1200 kg/h, quelle est l'ouverture de la vanne, la valeur de la pression de commande et la valeur de la commande envoyée par le régulateur TC ?

6-Pour la régulation de température seulement, déterminer la consigne à programmer sur le régulateur, le sens d'action et la valeur centrale u_0.

7-La consigne à programmer sur le LC est de 66.7 %, le sens d'action est négatif (inverse), la valeur centrale est de 60.0 %. Le régulateur est en automatique en mode Proportionnel seul avec un gain de 1. La régulation stabilise le niveau à 4.5 mètres. Le débit de fluide procédé issu de l'unité 2 est à sa valeur nominale, par contre, le débit issu de l'unité 1 est à une valeur différente de sa valeur nominale.

Déterminer la valeur du débit de l'unité 1 ?

8-Pour la régulation de niveau uniquement. L'analyse de la dynamique grandeur réglante - grandeur réglée est effectuée pour identifier le système. Les évolutions dans le temps de la mesure y (niveau) et de la commande u sont données ci-après (Figure 1.1) :



Déterminer la fonction de transfert réglante. En déduire le mode idéal de régulation et les paramètres du régulateur.

Corrigé de Problème 1

1-

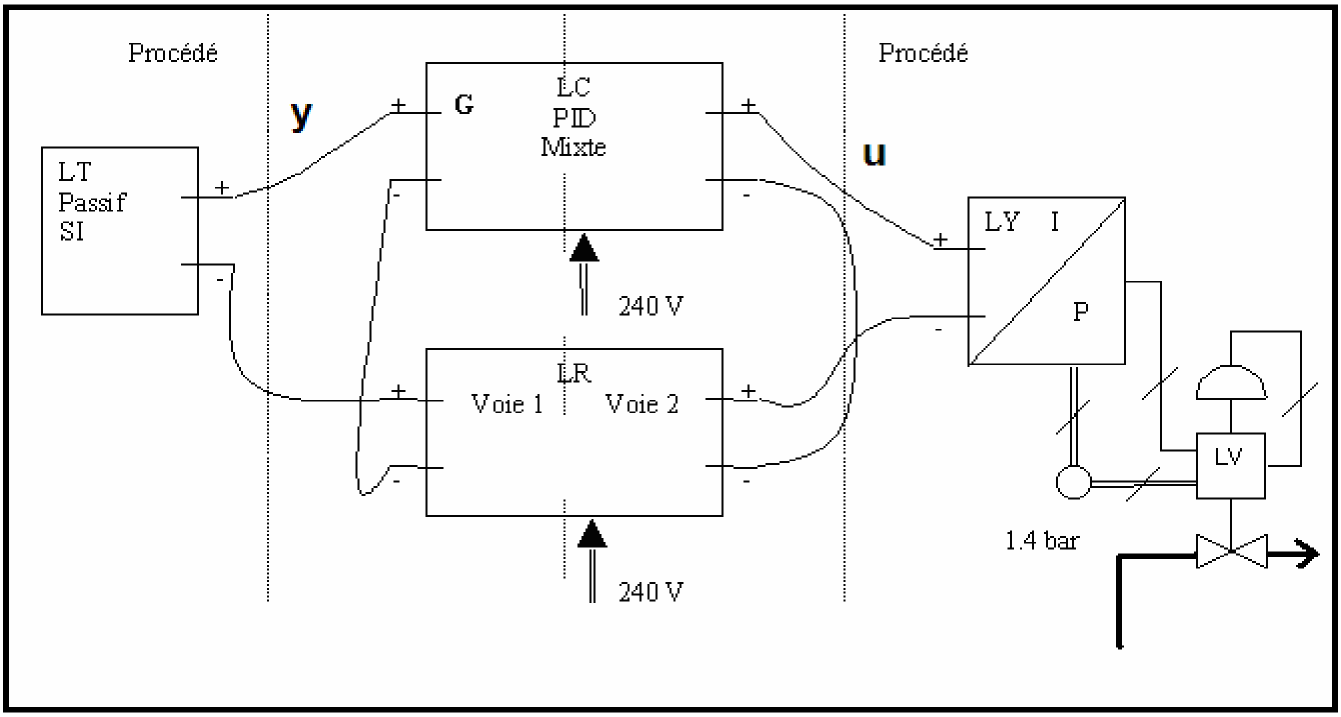
Régulation	Grandeur Réglée	Grandeur Réglante	Grandeurs Perturbantes	Consigne
Niveau	le niveau dans la cuve	le débit de soutirage de la cuve	- le débit de l'unité 1 - le débit de l'unité 2	4 m
Température	la température de sortie du fluide procédé	le débit de vapeur	- le débit de fluide procédé - la température d'entrée du fluide procédé - la température d'entrée de la vapeur	75 °C

2-
LT passif avec sécurité intrinsèque ou TT actif avec sécurité ADF tiennent compte de l'aspect explosif du fluide procédé.
4-20 mA est l'échelle de signal la plus courante, faible puissance et permet de tenir compte des grandes distances entre le procédé et le local technique ou la salle de contrôle.
Les étendues d'échelle conviennent. Elles englobent les plages de variation de la mesure : 0 à 5 m pour le niveau et 20 à 135 °C pour la température.

3-
Le positionneur est le régulateur d'ouverture de la vanne de régulation, il garantit que la commande est exactement exécutée.
Vanne NF pour la TV : en effet, en cas de rupture de la commande pneumatique, il faut cesser de chauffer le fluide procédé, un cas contraire pourrait conduire à l'ébullition du fluide procédé ce qui est explicitement déconseillé dans l'énoncé.
3000 L/h pour la LV conviennent en effet puisque ce débit dépasse la somme des valeurs maximales des alimentations de la cuve : 2400 L/h. La totalité de l'alimentation pourra donc être toujours évacuée.

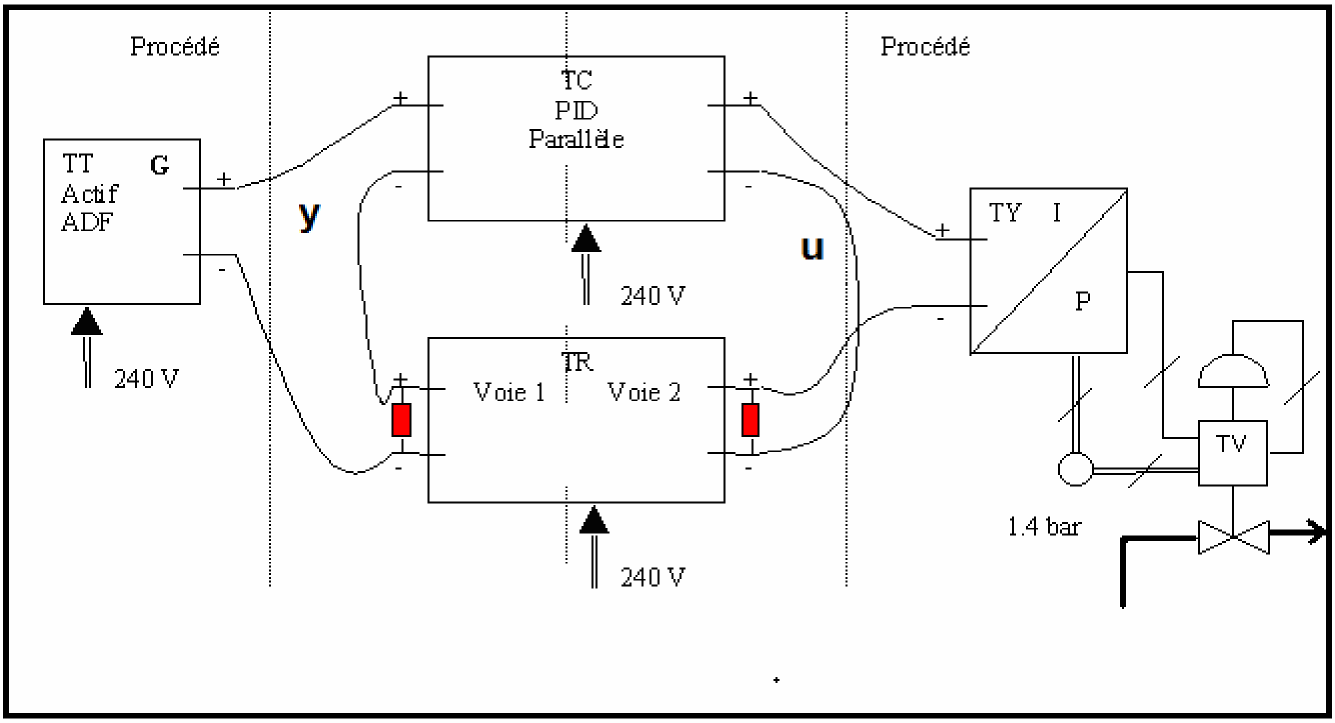
4- Pour la LC

- Mise en place de l'appareillage, tous les appareils parlent le même langage sauf la vanne d'où le convertisseur électropneumatique.
- Identification du générateur (y : Régulateur et u sortie correction du régulateur)
- Polarités en suivant les conventions générateur et récepteur
- Montage série pour que l'intensité et donc l'information soit la même
- Câblages



Pour la TC

- Mise en place de l'appareillage, tous les appareils parlent le même langage sauf la vanne d'où le convertisseur électropneumatique, et l'enregistreur d'où les résistances 250 Ω en shunt.
- Identification du générateur (y : capteur actif et u sortie correction du régulateur)
- Polarités en suivant les conventions générateur et récepteur
- Montage série pour que l'intensité et donc l'information soit la même
- Câblages



Résistance R=$\dfrac{\Delta V}{\Delta i}=\dfrac{4}{0.016}=250\Omega$

5.1- 8 mA=$\dfrac{1.5}{6}\times 16+4$

5.2- 117.6 °C =$\dfrac{16.3-4}{16}\times(150-10)+10$

5.3- 0.72 bar $=0.65\times(1-0.2)+0.2$; ouverture de 35 % (vanne NO) ; 1050 L/h= 0.35x3000

5.4- ouverture de 60 %=$\dfrac{1200}{2000}\times 100$; commande de 60 % (vanne NF) ; =0.68 bar $=0.60\times(1-0.2)+0.2$

6- Régulation de température : consigne à 46.4 % = $\dfrac{75-10}{150-10}\times 100$; sens d'action négatif ; valeur centrale u_0 = 37.5 % = $\dfrac{750}{2000}\times 100$

7- Débit Unité 1 = 749 L/h ; y =75 % ; u=51.7 % ; Débit soutirage = 1449 L/h ; Débit Unité 2 = 700 L/h

$$\begin{cases} u = u_0-(y-y_c)=60-(y-66.7) \\ y(4.5m)=\dfrac{4.5}{6}\times 100=75\% \end{cases} \Rightarrow u=51.7\% \Rightarrow Q_W=(1-0.517)\times 3000=1449 l/h=Q_{W1}+Q_{W2}$$

$$Q_W=Q_{W1}+700 \Rightarrow Q_{W1}=749 l/h$$

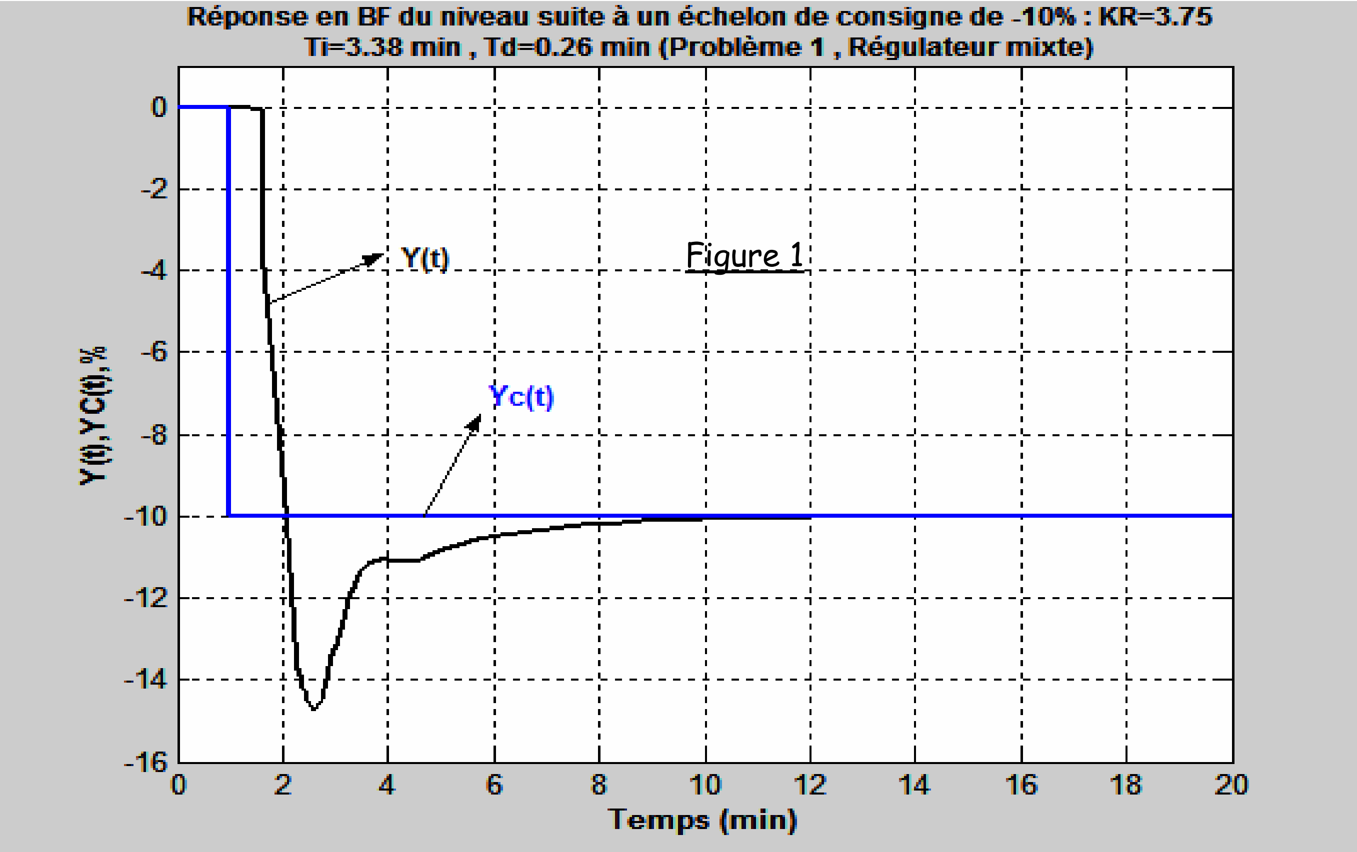
8- Système naturellement instable à réponse intégrale avec temps mort : τ= 0.65 min. ;
$$k=\frac{\tan(\alpha)}{\Delta u}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\Delta u}=\frac{\frac{(66.75-50)\%}{4.5}}{10}=0.372\,\text{min}.$$

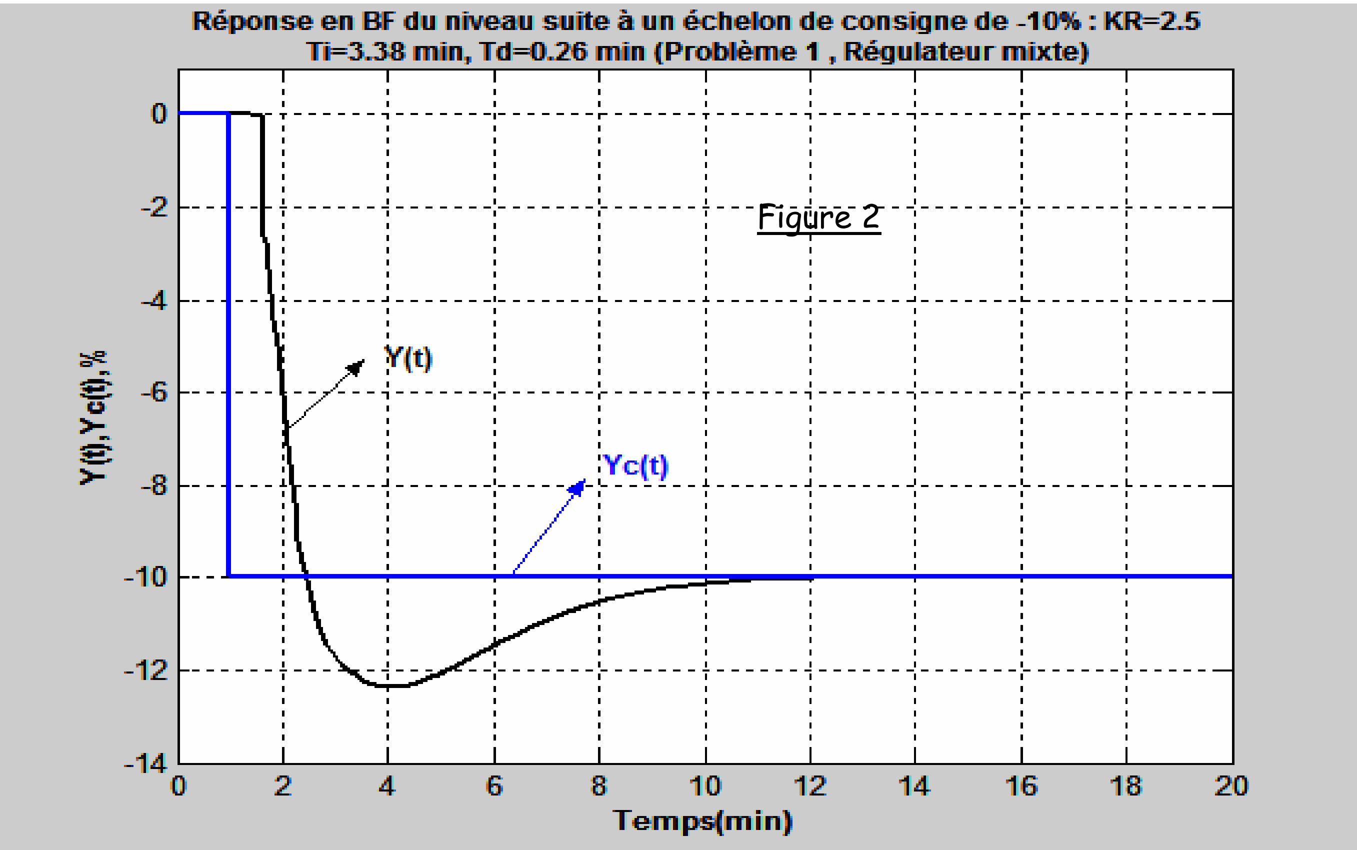
k. τ = 0.24 entre 0.2 et 0.5 : Algorithme PID

Régulateur LC de type mixte : $\begin{cases} K_R=\dfrac{0.9}{k.\tau}=3.75 \\ T_i=5.2.\tau=3.38\text{min} \\ T_d=0.4.\tau=0.26\text{min} \end{cases}$

Performances obtenues (Figure 1) :
D = 47% ; t5% = 6-1=5 min ; erreur statique=0, t_m= 2-1 = 1 min

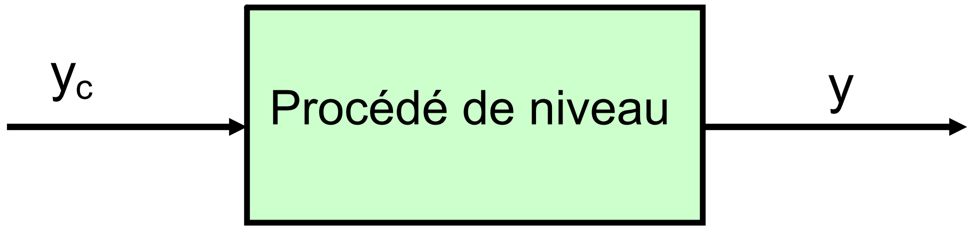
Performances (courbe 2) :
D = 23.6% ; t5% = 8-1=7 min ; erreur statique=0, t_m= 2.44-1 = 1.44 min


Réponse en BF du niveau suite à un échelon de consigne de -10% : KR=3.75
Ti=3.38 min , Td=0.26 min (Problème 1 , Régulateur mixte)
Y(t)
Figure 1
Yc(t)
Y(t),YC(t),%
Temps (min)
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


Réponse en BF du niveau suite à un échelon de consigne de -10% : KR=2.5
Ti=3.38 min, Td=0.26 min (Problème 1 , Régulateur mixte)
Figure 2
Y(t)
Yc(t)
Y(t),Yc(t),%
Temps(min)
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Exercice 7: Synthèse d'après un cahier des charges

On désire calculer les paramètres en boucle fermée de la FTBF d'un procédé de niveau qui peut être modélisé par un second ordre sans retard.



Modèle : $$FTBF(s) = \frac{Y(s)}{y_c(s)} = \frac{K}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^{\ 2}}}$$

1-a La sortie est égale à l'entrée en régime nominal lorsque l'entrée est un échelon :

$$\varepsilon_p = 0 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow FTBF(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^{\ 2}}}$$

b-Pour une entrée en rampe de pente 5.10^{-2} m/s, l'écart en régime permanent est inférieur à 5.10^{-3}m.

$$Yc(t) = at \Rightarrow Yc(s) = \frac{a}{s^2} \ , \ \ \mathrm{a} = 5.10^{-2}\ \mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{E(s)} = \mathrm{Yc(s)} - \mathrm{Y(s)} = \mathrm{Yc(s)}(1 - \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{Yc(s)}}) = Yc(s)(1 - FTBF(s)) \ \text{ soit } \ \mathrm{E(s)} = \mathrm{Yc(s)}(1 - \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^{\ 2}}})$$

$$\begin{cases} E(s) = Yc(s).\dfrac{2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^{\ 2}}}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^{\ 2}}} \\ Yc(s) = \dfrac{a}{s^2} \ , \mathrm{sE(s)} = a.\dfrac{2\zeta\frac{1}{\omega_0} + s}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^{\ 2}}} \end{cases} \Rightarrow s \xrightarrow{\lim sE(s)} 0 = \varepsilon_v = a.\frac{2\zeta}{\omega_0}$$

$$\varepsilon_v = a.\frac{2\zeta}{\omega_0} \leq 5.10^{-3}\, m \Rightarrow \frac{2\zeta}{\omega_0}5.10^{-2} \leq 5.10^{-3} \Rightarrow \frac{2\zeta}{\omega_0} \leq 10^{-1} = 0.1$$

c-Pour un chgt de consigne en échelon, le dépassement doit être compris entre 6% et 22% et le temps de réponse à 5% inférieur à 1s.
d-On souhaite que le temps de montée soit supérieur à 0.5.

$$6\% \le D \le 22\% \Rightarrow \begin{cases} 2.28 \le t_m\omega_0 \le 3 \\ 0.45 \le \zeta \le 0.65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.28 \le t_m\omega_0 \le 3 \\ 0.45 \le \zeta \le 0.65 \\ 5.4 \ge t_{5\%}\omega_0 \ge 5 \end{cases}$$

	ζ =0.45	ζ =0.5	ζ =0.55	ζ =0.6	ζ =0.65
$t_{5\%} <1$	$\omega_0 > 5.4$	$\omega_0 > 5.3$	$\omega_0 > 5.3$	$\omega_0 > 5.2$	$\omega_0 > 5$
$t_m > 0.5$	$\omega_0 < 4.56$	$\omega_0 < 4.84$	$\omega_0 < 5.16$	$\omega_0 < 5.54$	$\omega_0 < 6$

Exemple de calcul : $\zeta = 0.45 \Rightarrow \begin{cases} t_{5\%}\omega_0 = 5.4 \\ t_m\omega_0 = 2.28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{5\%} = \dfrac{5.4}{\omega_0} \quad 1 \\ t_m = \dfrac{2.28}{\omega_0} \quad 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \quad 5.4 \\ \omega_0 \quad 4.56 \end{cases}$

On peut choisir $0.6 \le \zeta \le 0.65 \Rightarrow 5 \le \omega_0 \le 6$

or $\begin{cases} 0.6 \le \zeta \le 0.65 \\ 5 \le \omega_0 \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.2 \le 2\zeta \le 1.3 \\ 5 \le \omega_0 \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.6 \le \zeta \le 0.65 \\ 5 \le \omega_0 \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1.2}{\omega_0} \le \dfrac{2\zeta}{\omega_0} \le \dfrac{1.3}{\omega_0} \\ \dfrac{1}{6} \le \dfrac{1}{\omega_0} \le \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1.2}{\omega_0} \le \dfrac{2\zeta}{\omega_0} \le \dfrac{1.3}{\omega_0} \\ \dfrac{1.2}{6} \le \dfrac{1.2}{\omega_0} \le \dfrac{1.2}{5} \end{cases}$

Donc $\dfrac{2\zeta}{\omega_0} \quad \dfrac{1.2}{\omega_0} \quad \dfrac{1.2}{6} = 0.2$

Or d'après 1.b $\dfrac{2\zeta}{\omega_0} \quad 0.1$ est donc non satisfaite

2- on change la condition d) par un temps de montée supérieur à 0.1s, les autres conditions du cahier des charges n'ayant pas changé.

$t_m > 0.1$

	ζ =0.45	ζ =0.5	ζ =0.55	ζ =0.6	ζ =0.65
$t_{5\%} <1$	$\omega_0 > 5.4$	$\omega_0 > 5.3$	$\omega_0 > 5.3$	$\omega_0 > 5.2$	$\omega_0 > 5$
$t_m > 0.1$	$\omega_0 < 22.8$	$\omega_0 < 24.2$	$\omega_0 < 25.8$	$\omega_0 < 27.7$	$\omega_0 < 30$
$\dfrac{2\zeta}{\omega_0} \quad 0.1$	$\omega_0 > 9$	$\omega_0 > 10$	$\omega_0 > 11$	$\omega_0 > 12$	$\omega_0 > 13$

Exemple :

$\zeta = 0.6 \Rightarrow 12 \leq \omega_0 \leq 27.7$, on prend par exemple $\omega_0 = 12\ \text{rd/s}$

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{2x0.6}{15} = 0.08 \quad 0.1$$

$$FTBF(s) = \frac{1}{1 + 0.08s + 4.44.10^{-3}s^2}$$

Remarque :

Le réglage du régulateur ou le calcul des paramètres du régulateur s'effectue en fonction des valeurs calculées de ζ et ω_0.

Exercice 8: Diagramme de Bode

La FTBO d'un système asservi est donnée par : $FTBO(s) = \dfrac{177.8}{100 + 25s + s^2}$.

Ecrire FTBO(s) sous forme : $FTBO(s) = \dfrac{K}{1 + 2\zeta\dfrac{s}{\omega_0} + \dfrac{s^2}{\omega_0{}^2}}$

$$FTBO(s) = \frac{177.8}{100 + 25s + s^2} = \frac{177.8}{1 + 0.25s + \dfrac{s^2}{10^2}} = \frac{K}{1 + 2\zeta\dfrac{s}{\omega_0} + \dfrac{s^2}{\omega_0{}^2}} \Rightarrow \begin{cases} K = 1.778 \\ \omega_0 = 10 \text{ rd/s} \\ \dfrac{2\zeta}{\omega_0} = 0.25 \Rightarrow \zeta = 1.25 \quad 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ régime apériodique $\Rightarrow$ la FTBO(s) peut encore s'écrire :

$$FTBO(s) = \frac{K}{1 + 2\zeta\dfrac{s}{\omega_0} + \dfrac{s^2}{\omega_0{}^2}} = \frac{177.8}{1 + 0.25s + \dfrac{s^2}{10^2}} = \frac{177.8}{(1 + 0.2s)(1 + 0.05s)}$$

$$= \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{K}{(1 + \dfrac{s}{\omega_1})(1 + \dfrac{s}{\omega_2})} \quad \text{avec} \quad T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 0.2s \text{ et } T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0.05s$$

On peut vérifier que $\omega_0^2 = \omega_1.\omega_2 \Rightarrow \log(\omega_0) = \dfrac{\log\omega_1 + \log\omega_2}{2}$, donc en échelle logarithmique ω_0 est au milieu de ω_1 et ω_2.

$$FTBO(s) = K\frac{1}{(1 + \dfrac{s}{\omega_1})}\ \frac{1}{(1 + \dfrac{s}{\omega_2})}$$

ω_1 = 5 rd/s et ω_2 = 20 rd/s sont les pulsations de coupure.

Construction pratique des diagrammes asymptotiques dans le lieu de Bode

Toute fonction de transfert peut se mettre sous la forme : $H(s) = \dfrac{K.N(s)}{s^{\alpha}.D(s)}$
où α est la classe de H(s).

N(s) et D(s) sont des produits de termes de type $(1+Ts)^k$ et (ou) $(1+\dfrac{2\xi}{\omega_o}s+\dfrac{s^2}{\omega_o^2})^k$.

1- Aux basses fréquences, H(jω) est équivalent à $\dfrac{K}{(j\omega)^{\alpha}}$, ce qui donne la 1ère asymptote.

Pour la courbe de gain, on a 20.log (|H(jω)|≈20log(K)-20.α.log (ω) asymptote de pente -α (-20.α. dB/décade). Pour la phase, on a φ = -α.π/2 asymptote horizontale.

2- On classe par ordre croissant toutes les pulsations de cassure 1/T et ω_o. Tout facteur de type $(1+Ts)^k$ qui figure dans D(s) (respectivement N(s)) amène, à partir de 1/T, pour la courbe de gain, une asymptote de pente modifiée de –k, soit -20k dB/décade (+k, soit + 20dB/décade), et pour la courbe de phase, une asymptote horizontale décalée de φ = -k.π/2 (φ = +k.π/2). Pour les facteurs de type $(1-Ts)^k$, on obtient des asymptotes pour la courbe de phase horizontales de pentes opposées à celles qu'on obtiendrai avec les facteurs $(1+Ts)^k$.

Tout facteur de type $(1+\dfrac{2\xi}{\omega_o}s+\dfrac{s^2}{\omega_o^2})^k$ qui figure dans D(s) (respectivement N(s)) amène, à partir de ω_o, pour la courbe de gain, une asymptote de pente modifiée de –2k, soit -40k dB/décade (+2k, soit + 40kdB/décade), et pour la courbe de phase, une asymptote horizontale décalée de φ = -k.π (φ = +k.π).

☞ Donc pour $FTBO(s) = K \frac{1}{(1+\frac{s}{\omega_1})} \frac{1}{(1+\frac{s}{\omega_2})}$, α = 0 , nous aurons :

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log\sqrt{(1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2)} - 20\log\sqrt{(1+(\frac{\omega}{\omega_2})^2)}$$

$$= 20\log K - 10.\log(1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2) - 10.\log(1+(\frac{\omega}{\omega_2})^2)$$

⇒ <u>3 asymptotes</u> :

<u>Basses fréquences</u> :

Pour la courbe de gain $|FTBO(j\omega)|_{dB}$ ≈20log(K)-20.α.log (ω) = 20log(K) = -5dB (1ère asymptote).

Pour la phase, on a φ = -α.π/2 =0 rd asymptote horizontale

<u>Grandes fréquences</u> :

<u>ω_1 = 5 rd/s < ω < ω_2 = 20 rd/s</u>

Pour la courbe de gain $|FTBO(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_1})$ (2ème asymptote)

Pour la phase, on aura une asymptote horizontale décalée de φ = -k.π/2= -.π/2

<u>ω_2 = 20 rd/s < ω</u>

Pour la courbe de gain :

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_1}) - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_2})$$

$$= 20\log K - 40.\log(\omega) + 40.\frac{(\log(\omega_1)+\log(\omega_2))}{2} = 20\log K - 40.\log(\omega) + 40.\log(\omega_0)$$

(3ème asymptote)

Pour la phase, on aura une asymptote horizontale décalée encore de φ = -k.π/2= -.π/2

$$\left|FTBO(j\omega)\right|_{dB} = 20\log K - 20\log\sqrt{(1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2)} - 20\log\sqrt{(1+(\frac{\omega}{\omega_2})^2)}$$

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \left|FTBO(j\omega_1)\right|_{dB} = 20\log K - 10.\log\sqrt{2} - 10.\log(1+(\frac{\omega_1}{\omega_2})^2)$$

$$= 5 - 3 - 10.\log\sqrt{(1+(\frac{1}{16}))} \approx 1.7\ dB$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \left|FTBO(j\omega_2)\right|_{dB} = 20\log K - 10.\log(1+(\frac{\omega_2}{\omega_1})^2) - 10.\log\sqrt{2} = 5 - 3 - 10\log(1+16) \approx -10.3\ dB$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \left|FTBO(j\omega_0)\right|_{dB} = 20\log(\frac{K}{2\zeta}) = 20\log(\frac{1.778}{2.5}) \approx -3dB$$

Intersection des trois asymptotes :

Asymptote 1 et 2 :

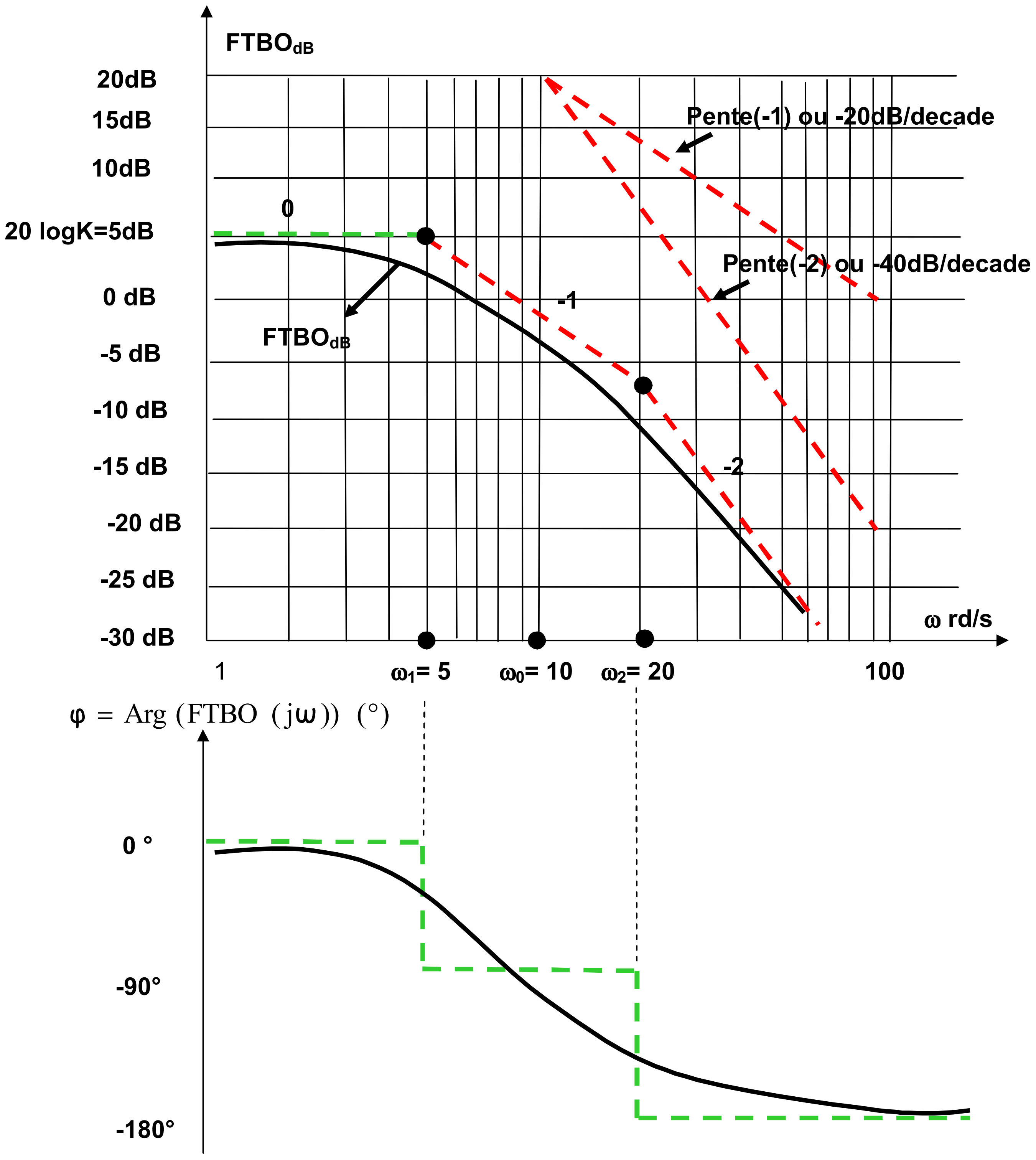
$$\begin{cases} \left|FTBO(j\omega)\right|_{dB} = 20\log K \ \ (1^{\text{ère}} \ \text{asymptote}) \\ \left|FTBO(j\omega)\right|_{dB} = 20\log K - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_1}) \ (2^{\text{ère}} \ \text{asymptote}) \end{cases} \Rightarrow \text{intersection en } (\omega = \omega_1, 20\log K = 5dB)$$

Asymptote 2 et 3 :

$$\begin{cases} \left|FTBO(j\omega)\right|_{dB} = 20\log K - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_1}) \ (2^{\text{ème}} \ \text{asymptote}) \\ \left|FTBO(j\omega)\right|_{dB} = 20\log K - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_1}) - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_2}) \ \ (3^{\text{ème}} \ \text{asymptote}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{intersection en } \ (\omega = \omega_2, 20\log K - 20.\log(\frac{\omega_2}{\omega_1}) = -7dB$$

Tracée :


FTBOdB
20dB
15dB
10dB
20 logK=5dB
0 dB
-5 dB
-10 dB
-15 dB
-20 dB
-25 dB
-30 dB
0
-1
-2
Pente(-1) ou -20dB/decade
Pente(-2) ou -40dB/decade
FTBOdB
ω rd/s
1
ω1= 5
ω0= 10
ω2= 20
100
φ = Arg (FTBO (jω)) (°)
0 °
-90°
-180°

On pouvait aussi traiter la FTBO comme contenant un seul facteur : $(1+\frac{2\xi}{\omega_o}s+\frac{s^2}{\omega_o^2})^k$ avec $k=1$. Dans ce cas et en posant $u=\frac{\omega}{\omega_o}$ (voir cours) :

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 10\log\left[\left(1-u^2\right)^2 + 4\xi^2u^2\right]$$

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} \xrightarrow{\omega\to 0} 20\log K \quad (1^{\text{ère}}\text{ asymptote})$$

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} \xrightarrow{\omega\to\infty} 20\log K - 10\log(u^4)$$

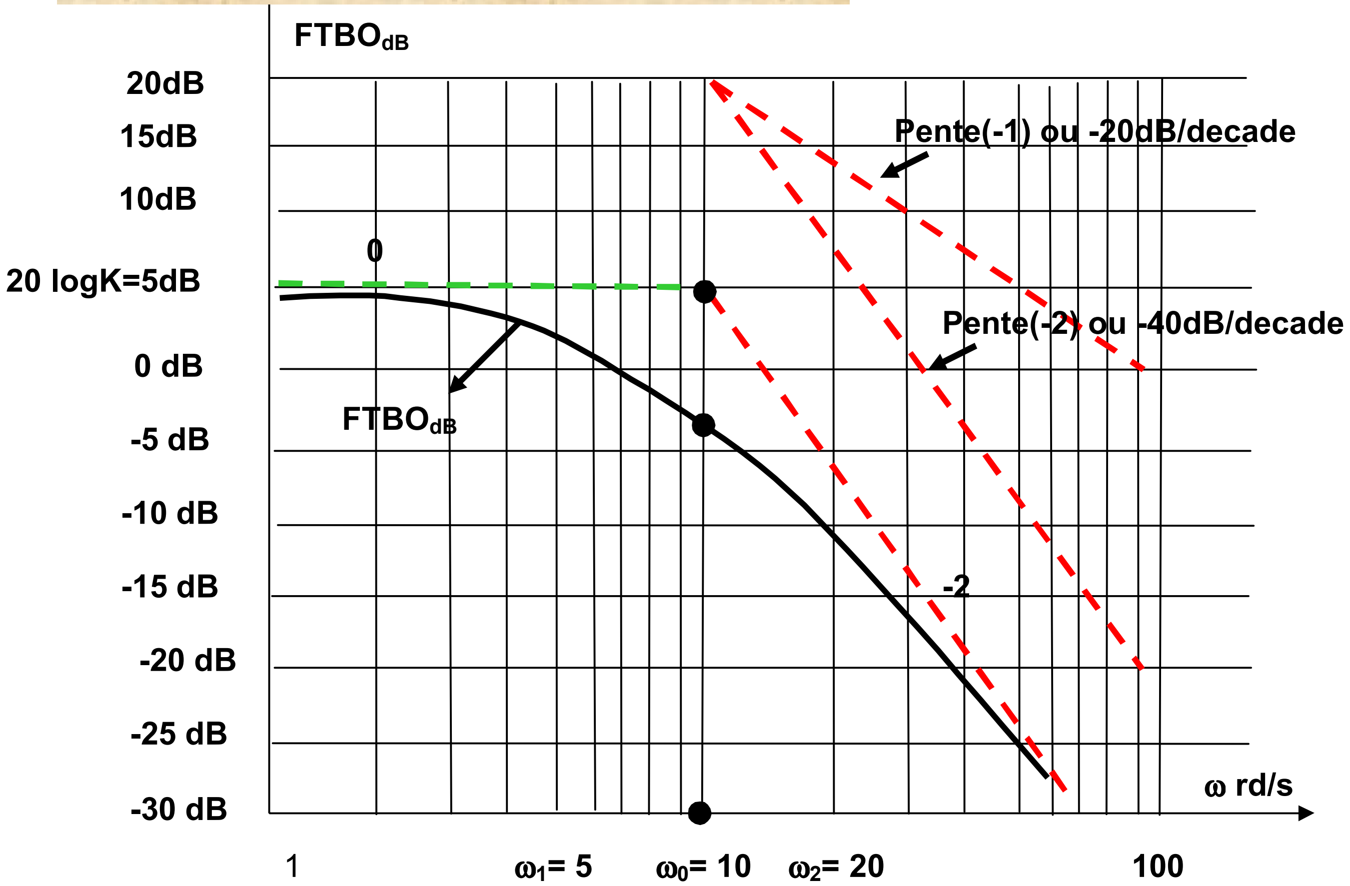
$$= -40\log\omega + 20\log K + 40\log\omega_o$$

$(2^{\text{ème}}$ asymptote de pente - 40dB/décade ou - 2)

avec $u=\frac{\omega}{\omega_o}$

Dans le plan de Bode, il y'a intersection des asymptotes pour $\omega=\omega_O$:

$$|FTBO\,(j\omega_o)| = \frac{K}{\sqrt{4\xi^2}} = \frac{K}{2\xi} \approx 0.7 \Rightarrow |FTBO\,(j\omega_o)|dB \approx -3dB$$



1-Calculer les deux valeurs de pulsation $\omega = \omega_3$ (pour avoir un gain de 0dB) et ω_4 (pour une phase de -135°).

On cherche ω_3 :

$$FTBO(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega_o}s + 1}$$

$$FTBO(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} + j\frac{2\xi}{\omega_o}\omega} \Rightarrow \left|FTBO(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + 4\xi^2u^2}}$$

$$\text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_o}$$

$$\left|FTBO(j\omega)\right| = 1 \Rightarrow \frac{K}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + 4\xi^2u^2}} = 1 \Rightarrow u^2 + (4.\xi^2 - 2).u + 1 - K^2 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 + 4.25.u - 2.16 = 0$$

$$\Delta = 26.7 \quad \text{et } u \quad 0 \quad \Rightarrow u = \frac{\omega_3}{\omega_o} \approx 0.68 \Rightarrow \omega_3 = 6.8 \text{ rd/s}$$

On cherche ω_4 :

$$FTBO(j\omega) = \frac{K}{1-u^2+j2\xi u}$$

$$\varphi = \arg(FTBO(j\omega)) = -\text{Arc}\tan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right) \quad \text{car } K > 0$$

$$-\text{Arc}\tan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right) = -135° \Rightarrow \left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow u^2 - 2\zeta u - 1 = 0 \Rightarrow \omega_4 - 25\omega_4 - 100 = 0 \Rightarrow \omega_4 = 28.5 \text{rd/s} (\omega_4 \quad 0)$$

Ou bien :

$$FTBO(j\omega) = K\frac{1}{(1+\frac{j\omega}{\omega_1})}\frac{1}{(1+\frac{j\omega}{\omega_2})} \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = Arg(FTBO(j\omega) = Arg(K) - Arg(\frac{\omega}{\omega_1}) - Arg(\frac{\omega}{\omega_2})$$

$$\varphi(\omega) = -135° \Rightarrow Arg(\frac{\omega}{\omega_1}) + Arg(\frac{\omega}{\omega_2}) = 135° \Rightarrow \text{de la forme } \alpha+\beta = 135° \Rightarrow tg(\alpha+\beta) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = -1 \Rightarrow \frac{\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1.\omega_2}} \Rightarrow \frac{\omega\omega_2+\omega\omega_1}{\omega_1.\omega_2-\omega^2} = -1 \Rightarrow \begin{cases}\omega^2 - 25\omega - 100 = 0 \\ \omega_1 = 5rd/s \\ \omega_2 = 20rd/s = 4.\omega_1\end{cases} \Rightarrow \omega = \omega_4 = 28.5rd/s$$

Quelle valeur K_R gain du régulateur permettrait d'annuler ce gain (c'est-à-dire d'avoir $|FTBO(j\omega_4)| = 1 \Rightarrow |FTBO(j\omega_4)|dB = 0$?

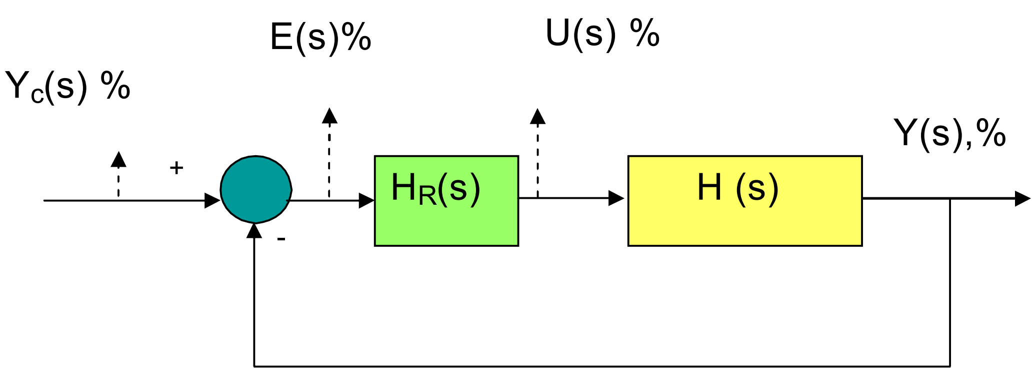
$$|FTBO(j\omega_4)| = 1 \Rightarrow \frac{K}{\sqrt{\left(1-(\frac{\omega_4}{\omega})^2\right)^2 + 4\xi^2(\frac{\omega_4}{\omega})^2}} = 1 = \frac{K}{\sqrt{\left(1-(\frac{28.5}{10})^2\right)^2 + 6.25(\frac{28.5}{10})^2}}$$

$$\Rightarrow K \approx 10.1 = K_R.Kp \Rightarrow K_R = \frac{10.1}{K_p}$$

Où K_p est le gain de la fonction de transfert réglante (procédé vu entre la sortie régulateur et sortie capteur donc la FTBF est à retour unitaire).

Exercice 10: Second ordre en BF

Un procédé asservi est représenté par son schéma bloc à retour unitaire. Le régulateur est proportionnel seulement soit $H_R(s) = K_R$.



On donne $H(s)=\dfrac{50}{50+15s+s^2}$.

1- Déterminer la FTBO et la FTBF du système ou procédé dans les cas suivants : K_R=0.5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5.

$$FTBO(s)=H_R(s).H(s)=\frac{50.K_R}{50+15s+s^2}=\frac{K_R}{1+\frac{3}{10}s+\frac{s^2}{50}}\Rightarrow\begin{cases}2^{\text{ème}}\ \text{ordre}\\ \text{gain } K_{BO}=K_R\ ,\ \zeta=\frac{3}{4}\sqrt{2}\approx 1.06>1,\\ \omega_0=5\sqrt{2}\approx 7.07\ \text{rd/s}\end{cases}$$

$$FTBF(s)=\frac{FTBO(s)}{1+FTBO(s)}=\frac{\dfrac{K_R}{1+\frac{3}{10}s+\frac{s^2}{50}}}{1+\dfrac{K_R}{1+\frac{3}{10}s+\frac{s^2}{50}}}=\frac{K_R}{(1+K_R)+\frac{3}{10}s+\frac{s^2}{50}}=\frac{\dfrac{K_R}{(1+K_R)}}{1+\dfrac{3}{10(1+K_R)}s+\dfrac{s^2}{50(1+K_R)}}$$

$$FTBF(s)==\frac{K_{BF}}{1+\dfrac{3}{10(1+K_R)}s+\dfrac{s^2}{50(1+K_R)}}=\frac{K_{BF}}{1+2\dfrac{\zeta_{BF}}{\omega_{0BF}}s+\dfrac{s^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

D'où le tableau :

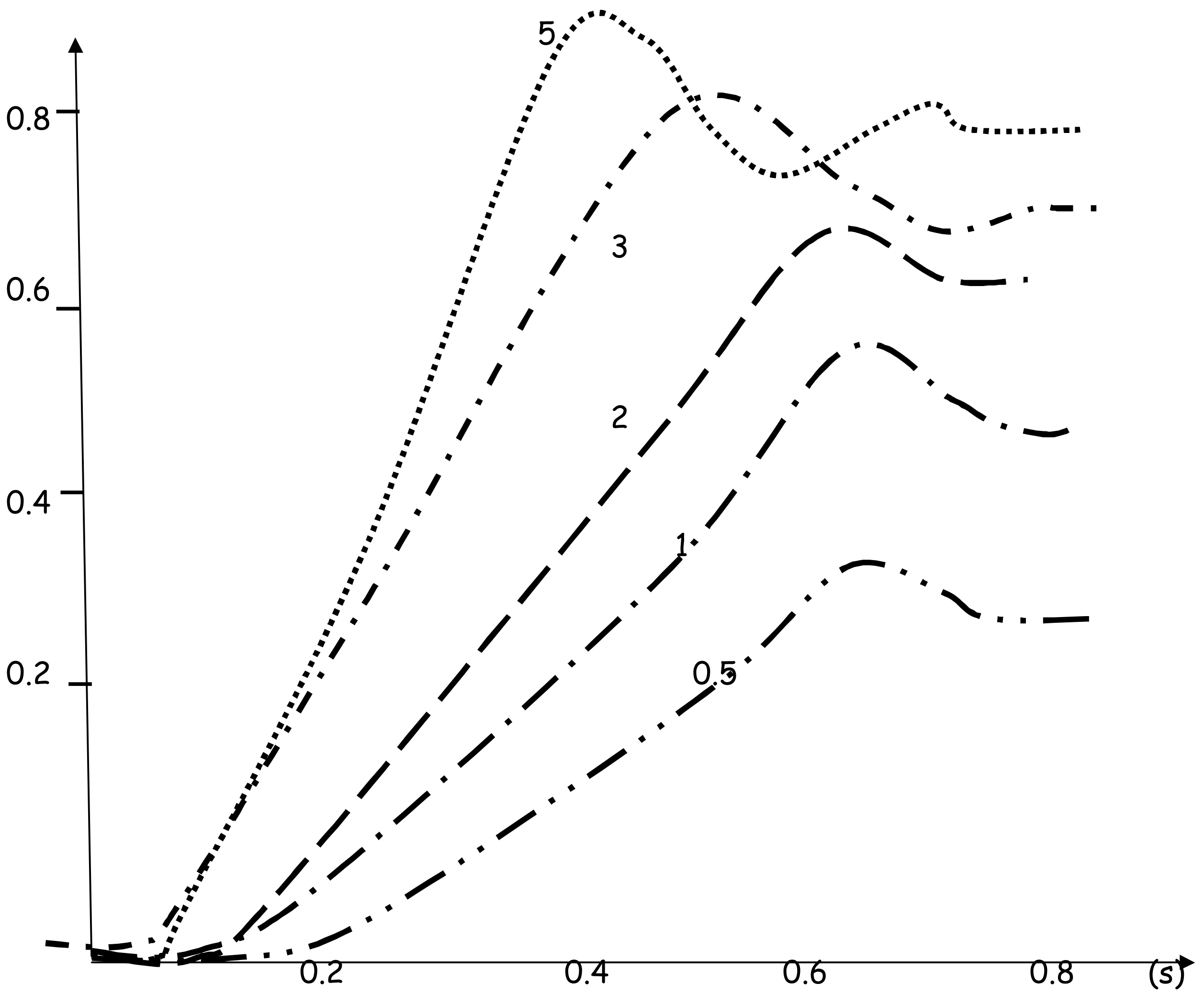
K_R	FTBF(s)	K_{BF}	ζ_{BF}	ω_{0BF}
0.5	$\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{10}s+\frac{s^2}{75}}$	$\frac{1}{3}\approx 0.33$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.86$	$5\sqrt{3}\approx 8.66$
1	$\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{20}s+\frac{s^2}{100}}$	$\frac{1}{2}=0.5$	0.75	10
2	$\dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{10}s+\frac{s^2}{150}}$	$\frac{2}{3}\approx 0.67$	$\frac{\sqrt{6}}{4}\approx 0.61$	$5\sqrt{6}\approx 12.25$

3	$\dfrac{\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{40}s+\frac{s^2}{200}}$	$\frac{3}{4}=0.75$	$\frac{3\sqrt{2}}{8}\approx 0.53$	$10.\sqrt{2}\approx 14.14$
5	$\dfrac{\frac{5}{6}}{1+\frac{1}{20}s+\frac{s^2}{300}}$	$\frac{5}{6}\approx 0.83$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\approx 0.43$	$10.\sqrt{3}\approx 17.32$

2- Donner l'allure des courbes des réponses indicielles de cet asservissement ;

Les gains ne sont pas unitaires donc il existera des erreurs statiques ou de position ε_p :

$$\varepsilon_p = 1 - K_{BF} = \frac{1}{K_{BO}+1}$$



On peut bien observer que l'erreur ou écart de position diminue quand K_R augmente, mais la stabilité diminue (système devient plus oscillant, ζ_{BF} diminue)

3- Dans le plan de Bode et pour chaque valeur de K_R , tracer les diagrammes asymptotiques de la FTBO et donner l'allure des courbes (Voir courbes).

4- Calculer la pulsation ω_1 pour laquelle $|FTBO(j\omega)|_{dB}=0$ et la pulsation ω_2 pour laquelle $Arg(FTBO(j\omega)=-135°$

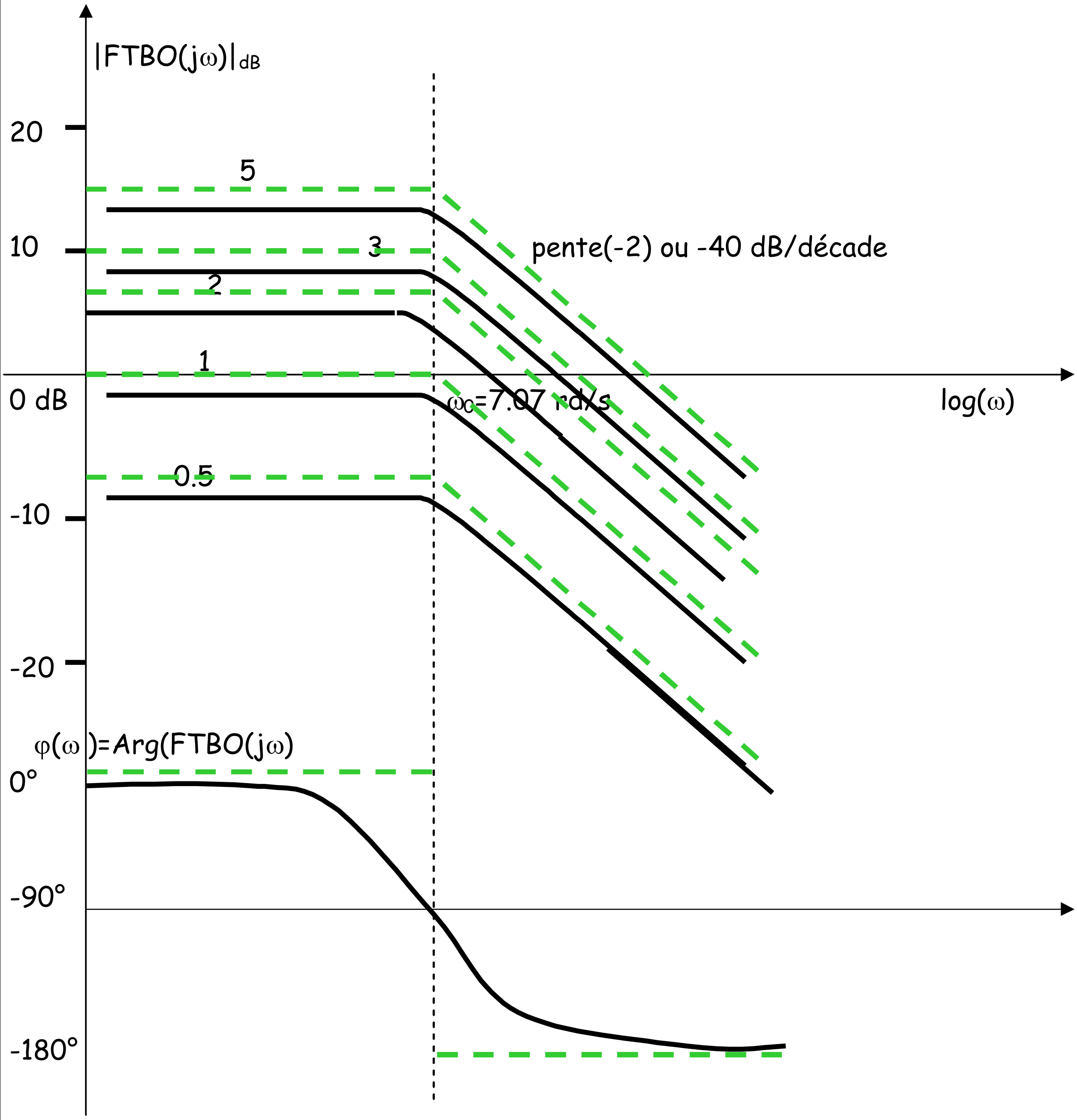
$$\mathrm{FTBO}(s) = \frac{K_R}{1+\frac{3}{10}s+\frac{s^2}{50}} \Rightarrow |\mathrm{FTBO}j\omega| = \frac{K_R}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{50})^2+(\frac{3}{10}\omega)^2}}$$

$$|\mathrm{FTBO}j\omega| = 1 \Rightarrow (1-\frac{\omega^2}{50})^2+(\frac{3}{10}\omega)^2 = K_R^2$$

On trouve :

$K_R = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 6.7$ rd/s
$K_R = 3 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 9.6$ rd/s
$K_R = 5 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 13.8$ rd/s

Pas de solution pour $K_R = 0.5$ et $K_R = 1$ (on peut le prévoir d'après le diagramme de Bode).



$$\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(\mathrm{FTBO}(j\omega)) = \text{-Arctan}\left\{\frac{\frac{3\omega}{10}}{1-\frac{\omega^2}{50}}\right\} = -135° \Rightarrow \frac{\frac{3\omega}{10}}{1-\frac{\omega^2}{50}} = -1 \Rightarrow \frac{3\omega}{10} = -(1-\frac{\omega^2}{50})$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 17.8 \mathrm{rd/s}$$

5- Calculer la valeur de K_R pour avoir une marge de phase de 45°. Quel est alors l'écart de position (écart statique).

Pour avoir une marge de phase de 45°, il faut se placer à $\omega=\omega_2$ et avoir un module de la FTBO($j\omega_2$) égal à 1 (Définition du la marge de phase).

$$|FTBOj\omega_2)| = \frac{K_R}{\sqrt{(1-\frac{\omega_2^2}{50})^2+(\frac{3}{10}\omega_2)^2}} = 1$$

$$K_R = K_{BO} = \sqrt{(1-\frac{\omega_2^2}{50})^2+(\frac{3}{10}\omega_2)^2} \approx 7.55$$

$$\varepsilon_p = 1 - K_{BF} = \frac{a}{K_{BO}+1} \text{ (voir cours)}$$

$$\varepsilon_p = \frac{a}{8.55}$$

a est l'échelon crée sur la consigne. Pour annuler cet écart on peut introduire une action intégrale dans la FT du régulateur par exemple on prendra un régulateur série :

$$H_R(s) = K_R(1+\frac{1}{T_i s}) \Rightarrow FTBO(s) = H_R(s).H(s) = \frac{K_R(1+T_i s)}{T_i s}H(s)$$

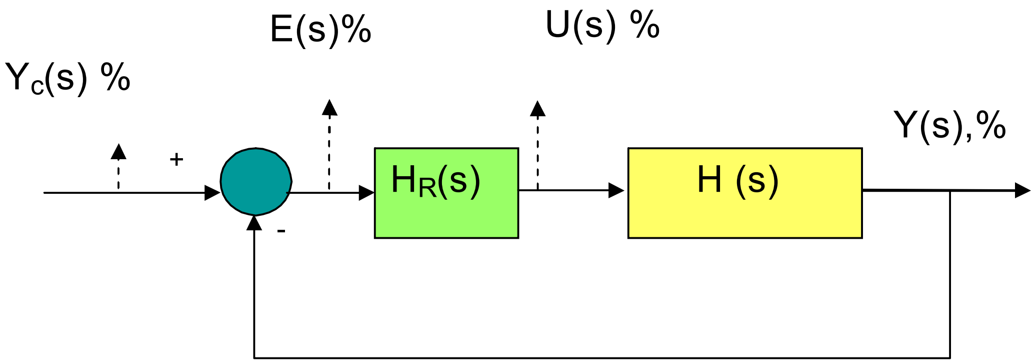
$$E(s) = Y_c(s) - Y(s) = \frac{Y_c(s)}{1+FTBO(s)} = \frac{Y_c(s)}{1+\frac{K_R(1+T_i s)}{T_i s}H(s)} = \frac{T_i s Y_c(s)}{T_i s + K_R(1+T_i s)H(s)}$$

$$sE(s) = \frac{T_i s^2 Y_c(s)}{T_i s + K_R(1+T_i s)H(s)}$$

$$Y_c(s) = \frac{a}{s} \Rightarrow sE(s) = \frac{T_i s.a}{T_i s + K_R(1+T_i s)H(s)} \xrightarrow[s=0]{} = \frac{0}{0+K_R(1+0)H(0)} = 0 \; (H(0)=50)$$

Exercice 12:

On considère le système à retour unitaire dont le schéma fonctionnel est le suivant :



On donne : $H_R(s) = K_R$ et $H(s) = \dfrac{1}{s(1+0.1s)(1+0.05s)}$

1- Tracer les diagrammes de Bode de la FTBO et discuter de la stabilité du système en BF.

$$H(s) = \frac{1}{s(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{20})} = \frac{1}{s(1+\frac{3}{20}s+\frac{s^2}{20})} = \frac{1}{s(1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})}$$

$$\text{avec} \quad \omega_1 = 10 \text{ rd/s} \quad \text{et} \quad \omega_2 = 20 \text{ rd/s} \qquad \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} \approx 14.14 \text{ rd/s}$$

$$FTBO(s) = \frac{K_R}{s(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{20})} = \frac{K_R}{s(1+\frac{3}{20}s+\frac{s^2}{20})} = \frac{K_R}{s(1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})}$$

3 asymptotes :

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K_R - 20\log\omega$$

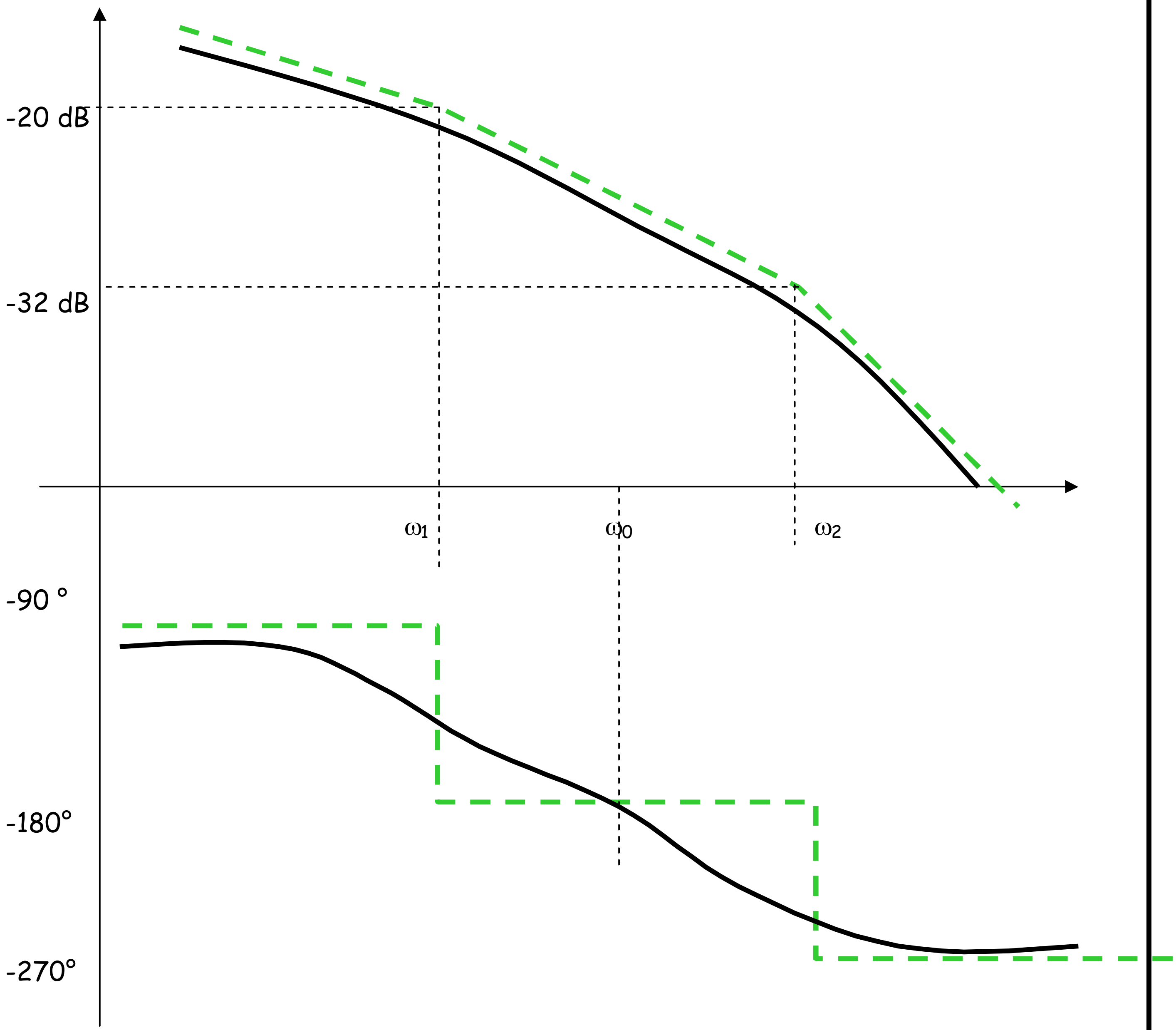
$$\omega = \omega_1 = 10 \Rightarrow |FTBO(j\omega)|_{dB} = |FTBO(j\omega)|_{dB} \approx (20\log K_R - 20)\,dB \quad (1)$$

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K_R - 20\log\omega - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_1})$$

$$\omega = \omega_2 = 20 \Rightarrow |FTBO(j\omega)|_{dB} = |FTBO(j\omega)|_{dB} \approx (20\log K_R - 20\log(20) - 20\log(2) = (20\log K_R - 32dB) \quad (2)$$

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K_R - 20\log\omega - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_1}) - 20.\log(\frac{\omega}{\omega_2}) \quad (3)$$

On trace le diagramme pour $K_R=1$, et si K_R varie $\Rightarrow$ translation verticale de 20 log(K_R)



2-Quelle valeur faut-il donner au gain K_R pour obtenir une marge de phase de 45° ?

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

$$\left|FTBO\,(j\omega)\right| = \frac{K_R}{\omega\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

$$M\phi = 45° \Rightarrow \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) = -135° = -3\frac{\pi}{4}$$

$$ou\ bien\ \ Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) + Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega}{\omega_2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}} \Rightarrow \omega = \omega_3 = 5.6\, rd/s$$

$$|FTBO(j\omega_3)| = 1 \Rightarrow |FTBO(j\omega_3)|_{dB} = 0$$

$$soit\ \ 20\log(\mathrm{K_R}) - 20\log\omega_3 - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2\right) - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ 20\log(\mathrm{K_R}) - 16.476 = 0 \Rightarrow \mathrm{K_R} = 10^{\frac{16.476}{20}} \approx 6.7$$

3-Quelle valeur faut-il donner au gain K_R pour obtenir une marge de gain de 10 dB ?

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right) - \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(2^{\text{ème}}\ \text{ordre}) = -\pi$$

Donc la marge du gain est obtenu pour $\omega = \omega_0$.

$$\mathrm{Mg} = -20\log|\mathrm{FTBO}(j\omega_0)|$$

$$\mathrm{Mg} = -20\log(\mathrm{K_R}) + 20\log\omega_0 + 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2\right) + 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)^2\right)$$

$$\mathrm{Mg} = -20\log(\mathrm{K_R}) + 20\log 14.14 + 10\log\left(1 + (1.414)^2\right) + 10\log\left(1 + (0.707)^2\right)$$
$$\mathrm{Mg} = -20\log(\mathrm{K_R}) + 29.5398$$

Le système est stable en boucle fermée tant que :

$$Mg > 0 \ \Rightarrow -20\log(K_R) > -29.5398 \Rightarrow \log(K_R) < \frac{29.5398}{20} \Rightarrow K_R < 10^{1.47699} \approx 29.99$$
$$Soit \quad K_R < 30$$

4-Retrouver la condition de stabilité stricte avec le critère de Routh.

$$\mathrm{FTBO}(s)=\frac{K_R}{s+\frac{3}{20}s^2+\frac{s^3}{200}} \Rightarrow \mathrm{FTBF}(s)=\frac{K_R}{K_R+s+\frac{3}{20}s^2+\frac{s^3}{200}}$$

Tableau de Routh :

$$\frac{s^3}{200}s+\frac{3}{20}s^2+s+K_R=0 \quad n=3 \Rightarrow 4 \text{ lignes}$$

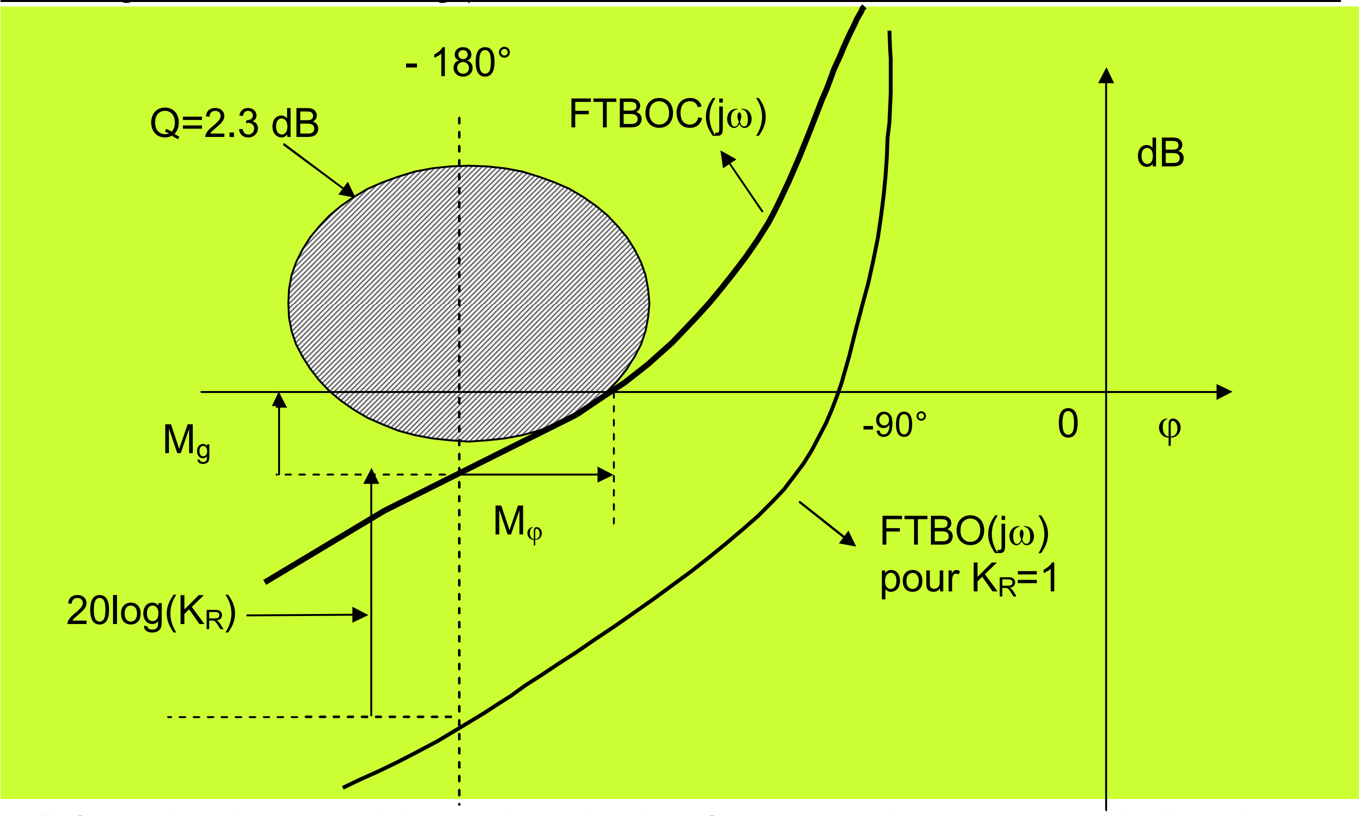
$\frac{1}{200}$	1
$\frac{3}{20}$	K_R
$-\dfrac{\frac{K_R}{200}-\frac{3}{20}}{\frac{3}{20}}$	0
K_R	

Pour que le procédé ou système soit stable :

$$\frac{\frac{K_R}{200}-\frac{3}{20}}{\frac{3}{20}} < 0 \Rightarrow \frac{K_R}{200} < \frac{3}{20}$$

$$\frac{K_R}{10} < 3 \Rightarrow K_R < 30$$

5-Tracer le diagramme de Black de la FTBO. Déterminer la valeur limite du gain K_R pour que la surtension reste inférieure à 30%.



Détermination graphique du gain du régulateur dans le plan de Black

On trace FTBO(jω) pour K_R=1 puis on translate de 20log(K_R) la courbe obtenue jusqu'à ce qu'elle soit tangente au contour du Hall (2.3dB). on trouve graphiquement 20log(K_R) ≈ 16.3 dB ⇒ $K_R \approx 10^{(16.3/20)}$ =6.5 et donc une marge de phase de 45° (question 2).

<u>Exercice 15</u>: <u>Modèle de référence de second ordre (réglage)</u>

La fonction de transfert réglante (commande ⟶ mesure G. réglée) d'un procédé a été déterminée par identification et elle est égale à $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$. On cherche à obtenir pour la régulation de ce procédé une FT en boucle fermée de la forme : $FTBF(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega o} s + 1}$.

1- Montrer qu'un régulateur PI de structure série peut satisfaire au fonctionnement désiré.

$$FTBF(s)=\frac{Y(s)}{Y_c(s)}=\frac{FTBO(s)}{1+FTBO(s)}=\frac{H_R(s).H(s)}{1+H_R(s).H(s)}=\frac{H_R(s)\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}}{1+H_R(s)\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}}=$$

$$\frac{H_R(s).K}{H_R(s).K+(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad \text{si } H_R(s)=K_R(1+\frac{1}{T_is})=K_R\left(\frac{1+T_is}{T_is}\right) \text{ et } T_i=T_2$$

$$\Rightarrow FTBF(s)=\frac{\frac{K_RK}{(1+T_1s)T_is}}{1+\frac{K_RK}{(1+T_1s)T_is}}=\frac{K_RK}{(1+T_1s)T_is+K_RK}=\frac{K_RK}{K_RK+T_is+T_1T_is^2}=\frac{1}{1+\frac{T_i}{K_RK}s+\frac{T_1T_i}{K_RK}s^2}=$$

$$\text{de la forme } \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_o^2}+\frac{2\xi}{\omega o}s+1} \quad \text{avec} \begin{cases} \frac{1}{\omega_o^2}=\frac{T_1T_i}{K_RK}\Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{K_RK}{T_1T_i}} \\ \frac{2\xi}{\omega o}=\frac{T_i}{K_RK}\Rightarrow \xi=\frac{\omega o}{2}.\frac{T_i}{K_RK}=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{K_RK}{T_1T_i}}.\frac{T_i}{K_RK}=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{T_i}{K_RKT_1}} \end{cases}$$

2- Prendre K=1.5 ; T_1=4min et T_2=10min pour l'application numérique. Calculer la valeurs des paramètres du régulateur $H_R(s)$ pour obtenir un coefficient d'amortissement ζ = 0.5. Quelle est alors la pulsation propre non amortie ω_0 ? Quelle est la valeur du premier dépassement D_1 de la réponse indicielle ?

App N :

$K=1.5\,,T_1=4\text{min}\ \ ,T_2=T_i=10$

$$\xi^2=\frac{T_i}{4.K_RKT_1}\Rightarrow K_R=\frac{T_i}{4.\xi^2KT_1}=1.67 \quad \text{et } \omega_0=\sqrt{\frac{K_RK}{T_1T_i}}=0.25\text{ rd/min}$$

$$D\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100=e^{-\frac{0.5\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}}\times 100=e^{-1.814}\times 100=16.3$$

3- Après une période d'essais du procédé il s'avère finalement qu'il est préférable d'obtenir la fonction de transfert en chaine fermée FTBF(s) suivante :

$$FTBF(s)=\frac{Y(s)}{Y_c(s)}=\frac{1}{(1+T_ds)^2} \quad \text{Avec } T_d=8\text{min}$$

Calculer les valeurs des nouveaux paramètres du régulateur $H_R(s)$ pour obtenir une telle fonction.

$$\text{FTBF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{1}{(1+T_d s)^2} = \frac{1}{(1+2T_d s + T_d{}^2 s^2)}$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{T_i}{K_R K}s + \dfrac{T_1 T_i}{K_R K}s^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T_i T_1}{K_R K} = T_d{}^2 & (1) \\ \dfrac{T_i}{K_R K} = 2T_d & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow K_R = \frac{T_i T_1}{T_d{}^2 K} = \frac{10 \times 4}{1.5 \times 8^2} = 0.42$$

$$(2) \Rightarrow K_R = \frac{T_i}{2T_d K} = \frac{10}{2 \times 1.5 \times 8} = 0.42$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_R K}{T_1 T_i}} = \sqrt{\dfrac{0.42 \times 1.5}{10 \times 4}} = 0.125 \text{ rd/min} \\ \xi = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{T_i}{K_R K T_1}} = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{10}{0.42 \times 1.5 \times 4}} = 0.996 \approx 1 \end{cases}$$

ζ=1 : en effet nous avons une racine double vue la forme de la FTBF(s).

4- On décide d'ajouter une action dérivée et on fixe T_d=T_1 et T_i=T_2.
Déterminer alors la FTBF(s). Pour un changement de 10% en échelon de consigne , calculer le temps de réponse à 5% pour une bande proportionnelle B_P=37.5%.

$$H_R(s) = K_R(1+\frac{1}{T_i s})(1+T_d) = K_R\left(\frac{1+T_i s}{T_i s}\right)(1+T_d)$$

$$\text{FTBO}(s) = H_R(s).H(s) = K_R\left(\frac{1+T_i s}{T_i s}\right)(1+T_d)\frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = K_R K\frac{1}{T_i s}$$

$$\Rightarrow \text{FTBF}(s) = \frac{K_R K}{K_R K + T_i s} = \frac{1}{1+\dfrac{T_i}{K_R K}s} = \frac{1}{1+Ts}$$

$$\text{T constante de temps } T = \frac{T_i}{K_R K} = \frac{T_2}{K_R K}$$

$$Y_c(s) = \frac{10}{s}, \quad \text{Bp} = 100/K_R = 37.5\% \Rightarrow K_R = 2.67 \text{ et } T = \frac{T_2}{K_R K} = \frac{10}{2.67 \times 1.5} = 2.5 \text{ min}$$

$$t_{5\%} \approx 3.T = 7.5 \text{ min}$$

Exercice 16: Réglage dans le domaine fréquentiel

Un procédé a été modélisé par la méthode de Broïda. Il est régulé par un régulateur PID série de fonction de transfert : $H_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R(1+\frac{1}{T_i s})(1+T_d s)$ (Figure 16.1).

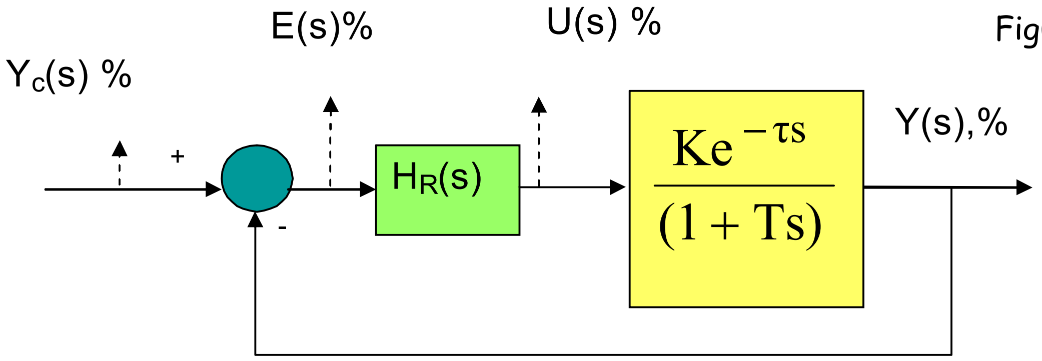


Figure 16.1

1- Etablir la fonction de transfert en chaine ouverte FTBO(s) du système asservi. Les valeurs trouvées lors de l'identification sont : T = 40s ; τ =8s et K=1.25 .

$$FTBO(s) = H_R(s).H(s) = K_R\left(\frac{1+T_i s}{T_i s}\right)(1+T_d s)\frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)}$$

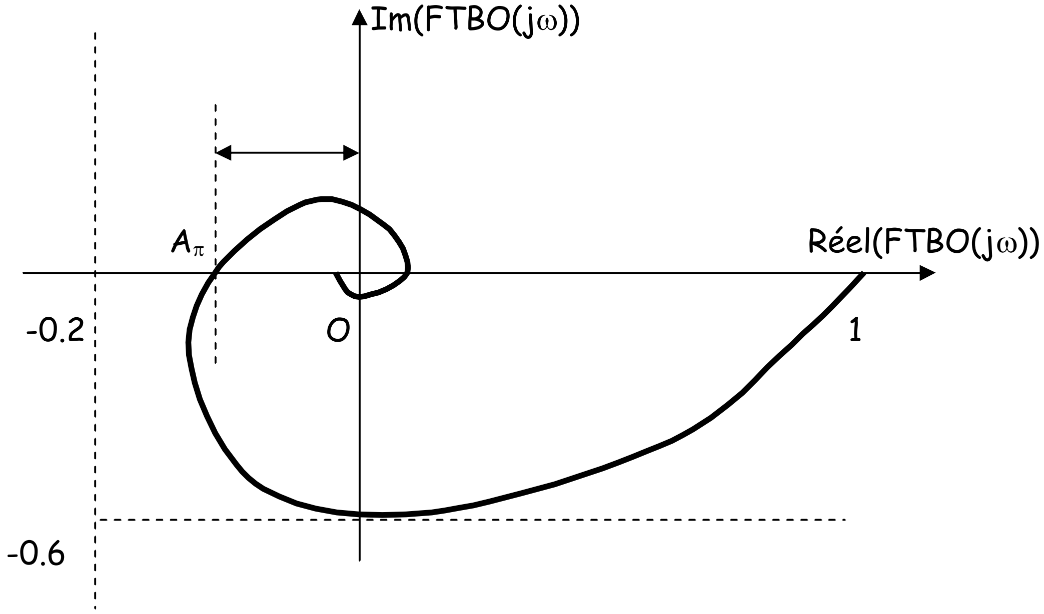
2- Etude en action proportionnelle

Exprimer le module et l'argument de la FTBO($j\omega$) pour K_R= 1/K.

Tracer la courbe de Nyquist de la FTBO($j\omega$) .Déterminer la marge de gain Mg et la marge de phase $M\varphi$ ou φ_m. Que peut-on en conclure ?

$$FTBO(s) = H_R(s).H(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(1+Ts)}$$

$$FTBO(j\omega) = \frac{e^{-\tau j\omega}}{(1+Tj\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |FTBO(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\tau\omega - \text{Arc}\tan(T\omega) \end{cases}$$



$$\phi(\omega) = -8\omega - Arc\tan(40\omega)$$
$$\omega = 0.1\, rd/s \Rightarrow \phi = -0.8 - Arc\tan(4) = -45.8° - 75.96° = -121.76°$$
$$\omega = 0.2\, rd/s \Rightarrow \phi = -1.6 - Arc\tan(8) = -174.5°$$
$$\omega = 0.21\, rd/s \Rightarrow \phi = -1.68 - Arc\tan(8.4) = -179.46° \Rightarrow \omega_\pi \approx 0.21\, rd/s$$
$$et \quad |OA_\pi| = \frac{1}{\sqrt{1+(40\times 0.21)^2}} = 0.1182 \Rightarrow Mg = -20\log|OA_\pi| = 18.55dB$$

$$|FTBO(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} = 1 \Rightarrow \omega_1 = 0\, \text{rd/s} \Rightarrow M\varphi = 180°$$

Le procédé est stable en action proportionnelle mais avec de mauvaises performances (précision : écart non nul, rapidité : réponse lente). Car le gain de la FTBO est faible. Une amélioration est nécessaire, le rapport T/τ=5 nous indique qu'il faut choisir un réglage PI ou PID.

3- Etude en action proportionnelle et intégrale

Exprimer le module et l'argument de la FTBO(jω), si T_i=T.

Tracer la courbe de Nyquist de la FTBO(jω) pour K_R= 1/K. Déterminer la marge de gain Mg et la marge de phase Mφ ou φ_m. Déterminer la valeur de K_R pour que la marge de gain soit Mg = 6dB.

$$FTBO(s) = H_R(s).H(s) = K_R \frac{Ke^{-\tau s}}{T_i s} = \frac{e^{-\tau s}}{T_i s}$$

$$|FTBO(j\omega)| = \frac{1}{T_i \omega} \quad , \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega = -\pi \Rightarrow \omega = \omega_\pi = \frac{\pi}{16} rd/s \approx 0.196 rd/s$$

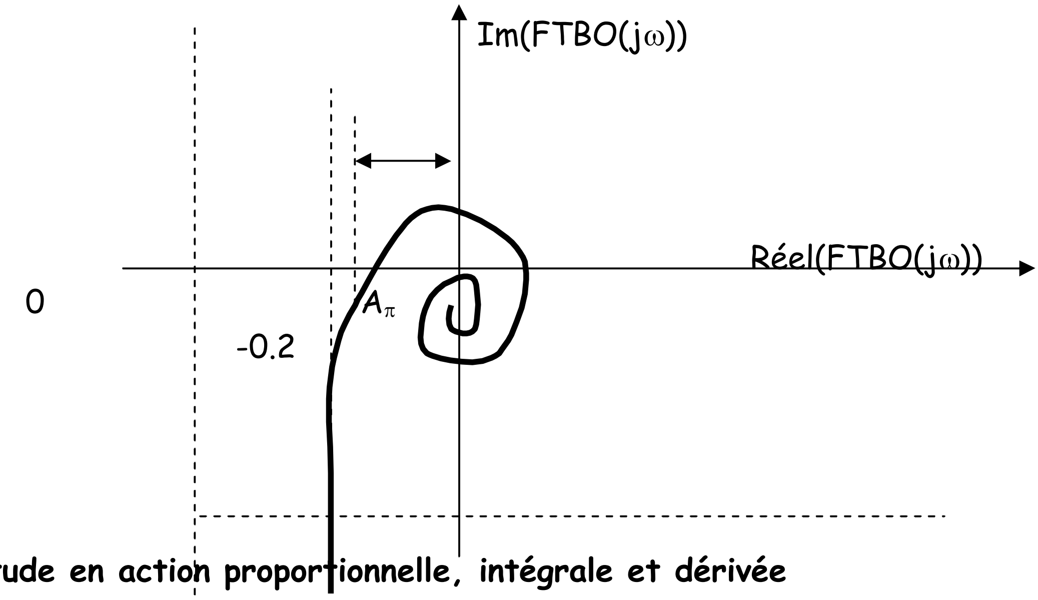
$$|FTBO(j\omega_\pi)| = \frac{1}{T_i\omega_\pi} = \frac{1}{40 \times 0.196 rd} = 0.1275 \Rightarrow Mg = 17.89 dB$$

$$|FTBO(j\omega)| = \frac{1}{T_i\omega} = 1 \Rightarrow \omega = \omega_1 = \frac{1}{T_i} = 0.025 rd/s \Rightarrow \varphi(\omega_1) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega_1 =$$

$$-\frac{\pi}{2} - 8 \times 0.025 = -1.77 rd = -101.459° \Rightarrow M\varphi = 180 - 101.459° = 78.5°$$

$$Mg = 6dB \Rightarrow |FTBO(j\omega_\pi)| = 10^{(-6/20)} = 0.5 = \frac{K.K_R}{T_i\omega_\pi} \Rightarrow K_R = 0.5 \times T_i \times \omega_\pi / K$$

$$K_R = 0.5 \times 40 \times 0.196 / 1.25 = 3.136 \approx 3$$



4- Etude en action proportionnelle, intégrale et dérivée

Exprimer le module et l'argument de la FTBO(jω), si T_i=T.
On impose une marge de gain de Mg= 6dB et une action dérivée $T_d=1/\omega_\pi$.
Déterminer les valeurs de K_R et T_d.

$$FTBO(s) = H_R(s).H(s) = K_R\left(\frac{1+T_i s}{T_i s}\right)(1+T_d s)\frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)}$$

$$= \frac{KK_R}{T_i s}(1+T_d s)e^{-\tau s} \Rightarrow FTBO(j\omega) = \frac{KK_R}{T_i j\omega}(1+T_d j\omega)e^{-\tau j\omega}$$

$$\begin{cases} |FTBO(j\omega)| = \dfrac{KK_R}{T_i\omega}\sqrt{1+(T_d\omega)^2} \\ \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - \tau\omega + \operatorname{Arc\,tan}(T_d\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(\omega_\pi) = -\dfrac{\pi}{2} - \tau\omega_\pi + \operatorname{Arc\,tan}(T_d\omega_\pi) = -\pi \\ T_d\omega_\pi = 1 \end{cases} \Rightarrow \omega_\pi = \frac{3\pi}{4.\tau} = \frac{3\pi}{4.8} \approx 0.2945 rd/s$$

$$\Rightarrow T_d = \frac{1}{\omega_\pi} = 3.39s$$

$$|FTBO(j\omega_\pi)| = \frac{KK_R}{T_i\omega_\pi}\sqrt{1+(T_d\omega_\pi)^2} = 0.5 \quad (Mg = 6dB)$$

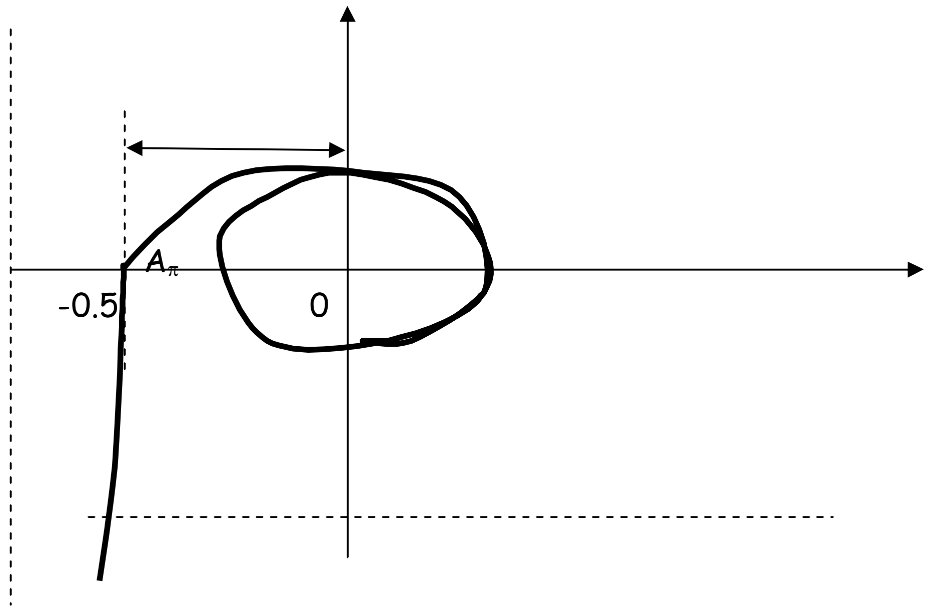
$$\Rightarrow K_R = \frac{0.5\times T_i\omega_\pi}{K\sqrt{1+(T_d\omega_\pi)^2}} = \frac{0.5\times T_i\omega_\pi}{K\sqrt{2}} = \frac{0.5\times 40\times 0.295}{1.25\sqrt{2}} = 3.337$$

$$|FTBO(j\omega_1)| = \frac{1.25\times 3.337}{40\omega_1}\sqrt{1+(3.39\omega_1)^2} = 1$$

$$1 = \frac{0.0108}{\omega_1{}^2}(1+(3.39\omega_1)^2) \Rightarrow \omega_1 = 0.1112 rd/s$$

$$\varphi(\omega_1) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega_1 + \operatorname{Arc\,tan}(T_d\omega_1) = -\frac{\pi}{2} - 8\times 0.1112 + \operatorname{Arc\,tan}(3.39\times 0.1112) = -2.099rd$$

soit $Mg = 180 - 120.25° = 59.74°$



Le PID pour un tel système permet donc d'obtenir une stabilité correcte ($M\varphi$=59.74° et Mg=6dB) et un écart de position nul sur un changement de consigne (poursuite). Mais la réponse temporelle risque d'être assez lente (temps de réponse en BF plus grand qu'en boucle ouverte)$\Rightarrow$ utiliser un régulateur numérique.